Bibliothek des Casimirianums.

5111

X14, 4 a laeva.

Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,

Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der neuesten verbesserten und vermehrten Pariser Original-Ausgabe aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. **Edmund Külp,**

Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Ersten Bandes erstes Buch,

enthaltend

die Arithmetik.

Zweite Ausgabe.

Bern, Chur und Leipzig,

Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1843.

Ln A 3580

Bibliotheca Casimiriana

Vorrede des Verfassers.

Einen aufmerksamen und verständigen Leser in den Stand zu setzen, daß er alle Schriften über die verschiedensten Zweige der Mathematik verstehen könne, ohne irgend eine vorläufige Unterweisung in dieser Wissenschaft bei ihm im Voraus anzunehmen, das ist das Ziel, welches ich mir bei der Abfassung dieses Werkes vorgesteckt hatte. Um dasselbe zu erreichen, mußte ich alle Lehren der gesammten reinen Mathematik, von ihren ersten Elementen an, der Arithmetik und Geometrie, bis zu den zusammengesetztesten Theilen der Integralrechnung hier niederlegen, ohne dabei irgend eine jener allgemeinen Theorien, welche zu dem Ganzen dieses Planes gehören, mit Stillschweigen zu übergehen.

Eine so große Mannigfaltigkeit von Gegenständen findet sich in zwei Bänden, und man würde irren, wenn man glaubte, daß nützliche Lehren, selbst interessante Einzelnheiten weggelassen wären. Eine genaue Durchsicht des Werkes wird zeigen, daß es so vollständig ist, als man nur hoffen konnte, daß es sogar mehr Anwendungen aufweist, als man von dem mässigen Raume, in welchem ich mich bewegte, erwarten sollte. Die Kürze, deren ich mich befleißigte, erlaubte aber eine solche Raumverringerung, ohne etwas wahrhaft Nützliches zu vergessen, und wie ich hoffe, ohne der Klarheit zu schaden.

Seit längerer Zeit habe ich die Ueberzeugung gewonnen, daß nichts mehr dem Zwecke, welchen doch Jeder erreichen soll, der über Wissenschaften schreibt, hinderlich sein kann, als sich bei jedem Gegenstande in lange ermüdende Entwickelungen einzulassen. Der Schriftsteller, der Alles sagt, was er denkt, hindert den Leser selbst zu denken; der Schüler wird unfähig der Hülfe des Lehrers zu entsagen; eine den Erfolg hemmende Schwerfälligkeit und Breite wird zur Gewohnheit; den Faden der wesentlichen Ideen zu verfolgen hindert die Verwirrung der Einzelnheiten; das Ganze wird nur schlecht aufgefaßt; Nebenumstände treten im Geiste an die Stelle der Hauptsache. Den Entwickelungen jedesmal die der geistigen Natur des einzelnen Schülers angemessene Ausdehnung zu geben, ist des Lehrers Aufgabe. Um gut zu unterrichten, sagt Laharpe, muß man nicht Alles sagen, was man weiß, sondern nur das, was für diejenigen paßt, welche man unterrichtet.

Dem Publikum scheint diese Unterrichtsweise zugesagt zu haben. Die den drei ersten Auflagen des vorliegenden Werkes zu Theil gewordene günstige Aufnahme befestigte mich in meinen frühern Ansichten, die der Kürze den Vorzug gaben. Ohne Zweifel wäre es leichter gewesen, die Anzahl der Bände zu vermehren; den Aufwand, um jedes Einzelne auf den erforderlichen Grad von Ausdehnung zu bringen, werden diejenigen nicht verkennen, die über ähnliche Gegenstände geschrieben haben.

Ich gebe zu, daß nur wenige Schüler dieses Werk ohne Hülfe eines Lehrers verstehen werden; daß aber alle mathematischen Bücher sich in demselben Falle befinden, habe ich durch vieljährige Erfahrung im Unterrichte erkannt. Die Vortheile, welche für die geistige Ausbildung des Schülers die Bündigkeit im Styl hat, sind unbestreitbar; die hiermit

unzertrennlich verbundenen Schwierigkeiten zu beseitigen, ist Sache des Lehrers.

Wer sich die Mühe nehmen will, diese Ausgabe mit den frühern zu vergleichen, wird einsehen, daß ich keine Sorge ausser Acht gelassen, keinen Rath verschmäht habe, um das Werk des Beifalls, sowohl der Gelehrten, als der Lehrenden würdig zu machen.

Die neuerdings veröffentlichten Arbeiten von Fourier, Sturm und Cauchy, die Werke von Lefebure, Mayer und Choquet haben mich bewogen, den algebraischen Theil bedeutend zu erweitern; damit er auf den der Wissenschaft entsprechenden Standpunkt gelange, war ich genöthigt, den zweiten Band fast ganz umzuarbeiten. Ich glaube mit einiger Zuversicht hoffen zu dürfen, meinen Zweck nicht ganz verfehlt zu haben.

Der Verfasser.

Vorrede des Uebersetzers.

Indem ich nun dieses in vieler Hinsicht vorzügliche Werk, der an mich ergangenen Aufforderung zu Folge, auf deutschen Boden zu verpflanzen suche, glaube ich sowohl von denen, welchen die Mathematik schon werth geworden ist, als auch von jenen, welche diese Wissenschaft näher kennen zu lernen wünschen, die Billigung meines Unternehmens erwarten zu dürfen. Und zwar dieß um so mehr, da die deutsche Literatur der Mathematik nur wenige Werke aufzuweisen hat, in denen das ganze Gebäude der Wissenschaft von seiner Grundlage an bis zu seiner jetzigen Höhe in einer so vollständigen Ordnung und schönen Einfachheit wie hier aufgeführt worden wäre. Keineswegs liegt es in meiner Absicht, die ausgezeichneten Werke von v. Ettingshausen, Burg, Salomon, Littrow und Ohm, und die in vielfacher Beziehung so trefflichen Lehrbücher von Lehmus, Unger, Grunert und Vieth, durch den obengeschehenen Ausspruch in ihrem Werthe herabsetzen zu wollen. Nur zu gut kennen wir die hohen Verdienste dieser Männer um die Verbreitung der mathematischen Wissenschaften; was wir einem Jeden von ihnen schuldig sind, wissen wir in Dankbarkeit zu schätzen.

Das Original ist in acht Abschnitte oder Bücher abgetheilt. Das erste Buch enthält die Arithmetik; das zweite die niedere Algebra; das dritte die ebene und körperliche Geometrie; das vierte die gradlinige Trigonometrie und die analytische Geometrie in der Ebene; das fünfte umfaßt die höhere Algebra, nämlich die Lehre von den höheren Gleichungen, den unendlichen Reihen u. s. w.; das sechste die sphärische Trigonometrie und die analytische Geometrie im Raume; das siebente die Differential- und Integral-Rechnung; das achte endlich die Variations- und Differenzen-Rechnung.

Diese Abtheilungen habe ich in der deutschen Bearbeitung beibehalten, mit dem Unterschiede, daß jede Abtheilung ein für sich bestehendes Buch ist. Eine größere Brauchbarkeit mochte ihm durch diese Einrichtung zu Theil geworden sein, indem sie einem Jeden das zu nehmen gestattet, was er gerade verlangt.

Ueberall war ich bemüht, die Bündigkeit des Originals so treu als möglich wieder zu geben; sollte bei diesem Streben hier und dort eine französische Wendung eingeflossen sein, so wird der billige Beurtheiler, in so fern die Klarheit dadurch nicht gelitten hat, mir dieß hoffentlich zu Gute halten.

An einigen Stellen sind nur geringe Aenderungen vorgenommen worden. So z. B. habe ich im §. 54 und §. 55 der Arithmetik die Angaben über das alte französische Maßsystem abgekürzt und dafür das Wichtigste von den Maßbestimmungen verschiedener anderer Länder angeführt. Mehrere im Original enthaltene Anmerkungen, welche bei einem ersten Studium des Werkes übergangen werden konnten, habe ich ferner unter dem Titel Noten als Anhang jedem einzelnen Buche beigefügt. Dieser Anhang wurde durch einige Zusätze vermehrt, in denen Manches weiter ausgeführt, Dieses und

Jenes noch entwickelt ist. Es erhielt dadurch das Einzelne so wie das Ganze zum Theil eine größere Abgeschlossenheit, zum Theil auch mehr Mannigfaltigkeit.

Möge die Uebersetzung gleich dem Original ihren Nutzen stiften, zur Belebung der mathematischen Studien unter der deutschen Jugend reichlich beitragen, und den Leser in das weite und nützliche Feld der angewandten Mathematik mit Sicherheit hinüber führen.

Der Übersetzer.

Erstes Kapitel.

Von den ganzen Zahlen.

Vorläufige Bemerkungen. Zahlensystem.

§. 1. Wenn wir uns eine Menge gleichartiger Dinge denken, so nehmen wir, um ihre Größe zu unterscheiden und solche unsern Mitmenschen, die sie nicht kennen, mittelst der Rede anzudeuten, eine bestimmte, als bekannt vorausgesetzte Größe an; diese wird **Einheit** genannt; sie ist willkührlich, und kann zuletzt nur durch die Sinne wahrgenommen werden; angeben müssen wir dann, wie viel mal diese Einheit in der fraglichen Menge enthalten ist, das heißt, wie viel mal solcher Einheiten zu nehmen sind, um ein jener Menge gleiches Ganze zu bilden. Das Resultat der Vergleichung heißt eine **Zahl** oder **Vielheit**. Um also eine genaue Kenntniß von der Größe eines Dinges auf anderm, als auf sinnlichem Wege zu erhalten, muß man vorerst die Größe der Einheit, hernach die Zahl kennen, welche anzeigt, wie oft die zu bestimmende Größe diese Einheit enthält. Um die verschiedenen Zahlen zu benennen, hat man folgende Wörter erdacht: eins bezeichnet die Einheit; zwei stellt die Zusammensetzung einer Einheit mit einer andern ihr gleichartigen Einheit dar; drei die Zusammensetzung zweier solchen Einheiten mit einer andern, oder die einer Einheit mit einer andern, zu dem hieraus Entstandenen noch eine andere hinzugefügt; drei mit noch einer andern zusammengesetzt gibt vier, und so fort. Diese durch die Einheit stufenweise vor sich gehende Vermehrung erzeugt die Zahlen:

Null, eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, die bezüglich durch folgende Zeichen oder **Ziffern** ausgedrückt werden, nämlich:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

Der Begriff, den man sich z. B. von der Zahl sieben machen muß, ist sechs um eins vermehrt, was, nach eben Gesagtem, gleichbedeutend ist mit fünf um zwei vermehrt, oder mit vier um drei vermehrt, u. s. w.

§. 2. Diese Operation, mittelst der man mehrere Zahlen in eine einzige vereinigt, heißt Addition; man deutet sie durch das Wort plus oder durch das Zeichen +, auch das positive genannt, an; es wird zwischen je zwei zu addirende Zahlen gestellt. Das Resultat der Addition heißt die Summe. — Mehrere Zahlen addiren heißt also nichts anders, als sie in eine einzige vereinigen, deren Größe verlangt wird; oder angeben, wie oft die Zusammenfügung mehrerer Gruppen gleichartiger Dinge die als Einheit angenommene Größe enthält, indem dieselbe Einheit bei jeder besondern Gruppe als Vergleichungsmittel galt. 2 zu 3 und 4 hinzufügen, oder die Summe von 2 plus 3 plus 4 nehmen, heißt: drei verschiedene Systeme, von denen das eine 2, das andere 3, das letzte 4 Dinge enthält, in ein einziges vereinigen. — Das zwischen zwei Größen gesetzte Zeichen = deutet an, daß solche Größen gleich sind. $2+3+4=9$ wird ausgesprochen: 2 plus 3 plus 4 sind gleich 9. Die vorhergehende Addition wird durch diese Gleichheit oder Gleichung ausgedrückt; $2+3+4$ ist das erste Glied, 9 das zweite Glied der Gleichung. Die Ungleichheit zweier Größen wird durch das Zeichen $<$ oder $>$ angezeigt; in die Oeffnung wird die als größer gedachte Größe geschrieben; $4 < 7$ heißt: 4 ist kleiner als 7; $9 > 3$ heißt: 9 ist größer als 3. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß durch Vermehrung oder Verminderung einer der zu addirenden Zahlen das Resultat um eben so viel größer oder kleiner wird; die Summe bleibt dagegen ungeändert, wenn einer der Summanden um eben so viel Einheiten vermindert, als der andere um solche vermehrt wurde. Z. B. $4 + 7$ übertrifft $4 + 5$ um 2, weil 7 um 2 größer als 5 ist; aber $4 + 7 = 6 + 5 = 2 + 9 = 3 + 8$.

§. 3. Es ereignet sich öfters, daß die zu addirenden Zahlen einander gleich sind; so z. B. $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Diese Art von Addition bekommt den Namen Multiplication, und wird folgendermaßen ausgedrückt: 2 viermal genommen, oder 4 mal 2, oder endlich 2 multiplizirt mit 4. Man schreibt dies so: $2 \cdot 4$ oder 2×4. Die Zahlen 2 und 4 heißen die Factoren, 2 ist der Multiplicand, 4 der Multiplicator; das Resultat 8 heißt das Produkt.

§. 4. Die Addition und Multiplication haben ihre umgekehrten Operationen. Bei der Addition $5 + 4 = 9$, verlangt man die Summe 9 aus den gegebenen Zahlen 5 und 4. Bei der Subtraction dagegen ist dies Resultat 9 nebst einer der andern Zahlen z. B. 5 gegeben, die andere 4 aber wird gesucht; d. h. man soll die Zahl 4 finden, die zu 5 addirt, die Summe 9 gibt. Diese Operation, welche in einer Zerlegung der beiden Systeme 5 und 4 besteht, die in ein Einziges 9 vereinigt waren, geht offenbar dahin, 5 von 9 hinwegzunehmen, was durch das Zeichen — dargestellt und minus ausgesprochen wird. Man setzt dies Zeichen, auch das negative genannt, zwischen die beiden Zahlen vor diejenige, welche abgezogen werden soll. — Aus dem was wir über die Addition gesagt, können wir schließen: 1) daß eine einseitige Vermehrung der abzuziehenden Zahl um eine oder mehrere Einheiten das Resultat um gleichviel verringert; 2) daß eine gegenseitige Vermehrung oder Verminderung beider Zahlen um die nämliche Größe das Resultat unverändert läßt; 3) daß das Resultat der Subtraction zweier Zahlen die Größe angibt, um welche die eine die andere übertrifft, was diesem Resultat den Namen Differenz, Ueberschuß oder Rest gegeben hat.

§. 5. Bei der Multiplication sind die beiden Factoren gegeben, man sucht ihr Produkt; kennt man aber dieses Produkt und den einen Factor und will man daraus den andern Factor finden, so ist diese Operation eine Division. Man hat $2 \times 4 = 8$; 8 ist das Produkt der Multiplication von 2 mit 4. Bei der Division hingegen ist 8 und 4 gegeben; man sucht 2, d. h. die Zahl, welche 4 mal genommen 8 hervorbringt. Man schreibt diese Division folgendermaßen: $\frac{8}{4}$ oder $8 : 4 = 2$ und liest: 8 dividirt durch 4. 8 ist der Dividend, 4 der Divisor; das Resultat heißt der Quotient. Produkt und Dividend bezeichnen demnach eine und dieselbe Zahl, desgleichen Divisor und Multiplicator, Quotient und Multiplicand. Die jedesmalige Rechnungsart bedingt nur näher den Gebrauch dieser Wörter.

§. 6. Bevor wir die Mittel lehren, diese vier Grundoperationen mit gegebenen Zahlen zu bewerkstelligen, müssen wir uns erst eine passende Wortsprache für sämmtliche Zahlen schaffen, Zeichen zu ihrer bildlichen Darstellung erfinden; es macht dieses das aus, was man ein Zahlensystem nennt. Beim ersten Anblick scheint es nothwendig, eine unendliche Menge von Wörtern zu schaffen, um alle Zahlen zu benen-

nen, und eben so viele Buchstaben und Zeichen, um sie durch die Schrift darzustellen. Es hatten aber die Erfinder eine sinnreiche Idee, welche die Zuflucht zu einer so großen Menge von Wörtern und Zeichen unnöthig machte; diese Idee bestand darin, die Zahlen zu zehn zu gruppiren, und jede dieser Gruppen besonders zu benennen und zu bezeichnen. Sie hatten demnach die Uebereinkunft getroffen, eine Zusammenstellung von zehn Einheiten zehn, oder einen Zehner zu nennen; die Zehner dann gerade so zu zählen, wie sie solches mit den Einheiten gethan. Einen Zehner, zwei Zehner, drei Zehner.... neun Zehner, oder, was gleichbedeutend ist, zehn, zwanzig, dreißig.... neunzig stufenweise zu den neun einfachen Einheiten hinzugefügt gedacht, waren sie so im Stande, bis zu neun und neunzig Einheiten zu zählen. — Ebenso bildeten sie eine Gruppe von zehn Zehnern, welche sie hundert oder ein Hundert nannten; sie zählten ein, zwei, drei.... Hunderte, gerade so, wie sie die Einheiten und Zehner zählten, nämlich ein Hundert oder hundert, zwei Hunderte oder zweihundert.... neun Hunderte. Diese Benennungen gestatteten ihnen also bis zu neunhundert neun und neunzig Einheiten zu zählen, indem sie die Zahlen der Hunderte, Zehner und Einer auf gehörige Weise mit einander verbanden.

Zehn Hunderte wurden ein Tausend genannt; ganz auf dieselbe Weise wie oben entstanden dann die Benennungen zwei tausend, drei tausend.... neun tausend. —

Um diese glückliche Erfindung in die Schriftsprache zu übertragen, kam man überein, einer Ziffer, welche auf der linken Seite einer andern Ziffer angesetzt ward, einen zehnmal größern Werth beizulegen, als den, welchen sie in der Stelle dieser andern haben würde. Daraus ergab sich, daß man in die erste Stelle von der Rechten zur Linken die einfachen Einheiten zu setzen hatte; in die folgende Stelle die Zehner, in die dritte Stelle die Hunderte, in die vierte die Tausende u. s. f. Der Ausdruck 23 bedeutet also zwei Zehner und drei Einheiten, oder drei und zwanzig; ebenso ist 423 mit vier hundert drei und zwanzig gleichbedeutend. Sind in der Zahl keine Einheiten oder keine Zehner rc. vorhanden, so bedient man sich des Zeichens 0, das an und für sich keinen Werth hat, an die Stelle der fehlenden Ziffer aber geschrieben wird, damit von den übrigen jede ihre Stelle beibehalte. So z. B. bedeuten 20, 400, 507 so viel als zwanzig, vierhundert, fünf hundert und sieben.

Es ist an seinem Orte, hier anzuführen, daß der Sprachgebrauch vorgezogen hat, für die durch 11, 12 dargestellten Zahlen elf, zwölf anstatt einzehn, zweizehn zu sagen, wie es eigentlich nach der allgemeinen Uebereinkunft sein sollte, so wie man z. B. sagt vierzehn, achtzehn ꝛc.

Dies vorausgesetzt, hat man nun irgend eine Zahl geschrieben, z. B. 537, und will sie um 1 vermehren, so ist es offenbar hinreichend, der Ziffer zur Rechten 1 hinzuzufügen; man hat 537 + 1 = 538; ebenso 538 + 1 = 539. Ist diese Ziffer zur Rechten eine 9, so wird man sie durch eine 0 ersetzen, und die Vermehrung um 1 auf die Ziffer in der zweiten Stelle übergehen lassen: 539 + 1 = 540; denn 530 + 9 + 1 = 530 + 10 = 540. Ist die Ziffer der zweiten Ordnung ebenfalls eine 9, so wird man diese beiden Ziffern 9 durch Nullen ersetzen und die Ziffer der dritten Stelle um 1 vermehren: 2599 + 1 = 2600; denn 2500 + 99 + 1 = 2500 + 100 u. s. f. — 12999 + 1 = 13000. — 509 + 1 = 510. — 10999 + 1 = 11000.

Da jede Zahl durch wiederholte Zusammenfügung der Einheiten entstanden ist, so ergibt sich hieraus die Möglichkeit, mittelst der zehn Ziffern sämmtliche Zahlen zu schreiben.

§. 7. Daß das Numeriren durch Worte dem schriftlichen Numeriren, wenigstens für die kleineren Zahlen, vorangegangen sei, daran ist wohl nicht zu zweifeln. Leicht war es aber im letztern durch bloße Nebenaneinanderreihung von Ziffern zu ungeheuern Zahlen emporzusteigen, und die Operationen der Arithmetik konnten solche beträchtlichen Resultate liefern. Man durfte wohl nicht lange anstehen, um einzusehen, daß es unnöthig sei, irgend eine Aenderung in der Schriftsprache der Zahlen vorzunehmen, indem sie allen Bedürfnissen genügte, während die vorher auseinandergesetzte Wortsprache sich unzulänglich zeigte, Zahlen auszusprechen, deren Größe durch mehr als vier Ziffern dargestellt wurde. In der That hätte man so fortgefahren, jeder einzelnen Zifferstelle einen besondern Namen zu geben, wie man solches bis zu vier Ziffern, den Einern, Zehnern, Hunderten und Tausenden gethan hat: so wäre man in die mißliche Lage gerathen, eine unendliche Menge von Wörtern zu gebrauchen, weil es nämlich eine unendliche Menge von nebenaneinanderliegenden Ziffern geben konnte. Um diesen Mißstand zu vermeiden, schlug man folgenden Ausweg ein. Man kam überein, die Ziffern in Gruppen von sechs Ziffern, von der rechten Seite an-

fangend, abzutheilen; jede Klasse oder Gruppe dann für sich zu lesen, als wenn sie allein da stände, ihr blos den zur Benennung gehörigen Namen beilegend. Diese nach den Tausenden folgenden Klassen heißen Millionen, Billionen, Trillionen ꝛc. Um also folgende Zahl auszusprechen

1	2	|	4	5	3	2	2	7	|	5	3	9	8	0	4
Zehner der Billionen,	Billionen,		Hunderttausende der Millionen,	Zehntausende der Millionen,	Tausende der Millionen,	Hunderte der Millionen,	Zehner der Millionen,	Millionen,		Hunderttausende,	Zehntausende,	Tausende,	Hunderte,	Zehner,	Einer,

wird man den numerischen Werth jeder einzelnen Klasse aussprechen, und den ihr gehörigen Namen dazu nennen. Man liest also: zwölf Billionen, vier hundert drei und fünfzig tausend zwei hundert sieben und zwanzig Millionen, fünf hundert neun und dreißig tausend acht hundert und vier.

Anmerkung. Anstatt die Ziffern einer gegebenen Zahl in Klassen von je sechs Ziffern abzutheilen, hätte man sie auch in Klassen von zwei oder vier Ziffern zerlegen können. So theilen die Franzosen die Ziffern einer Zahl in Klassen von je drei Stellen. Diese aufeinander folgenden Klassen nennen sie Einheiten, Tausende, Millionen, Billionen, oder Milliarde, Trillionen u. s. w. Die oben angegebene Zahl würde hiernach ausgesprochen werden:

Trillionen,	Billionen,	Millionen,	Tausende,	Einheiten
12 ,	453 ,	227 ,	539 ,	804 .

Bei den Franzosen sind demnach die Billionen, Trillionen ꝛc. kleinere Zahlen als bei uns. Es ist leicht einzusehen, daß die Untersuchung der Grenzen der im Gebrauch häufiger vorkommenden Zahlen die zweckgemäßeste unter den verschiedenen Vorschriften, die Ziffern in Klassen abzutheilen, gewählt haben wird.

Es ist klar, daß zu einer unendlichen Anzahl von Klassen eine unendliche Anzahl von Wörtern nöthig sind, um sie auszusprechen; die

Schwierigkeit war demnach nur weiter hinausgerückt worden. Da uns aber diese Sprachweise in den Stand setzt, selbst ungeheure Zahlen zu nennen, welche alle die in der Anwendung vorkommenden an Größe übersteigen, so genügt die festgesetzte Uebereinkunft allen Bedürfnissen. Hat übrigens eine Zahl eine gewisse Grenze erreicht, so hilft ihr bloßes Aussprechen nichts; ihre Größe dadurch vorzustellen, sind wir nicht vermögend.

Diese bewunderungswürdige Idee, den Ziffern noch besondere Stellenwerthe, ausser den ihnen eigenthümlich zukommenden Werthen, beizulegen, ist so einfach, daß wir nicht erstaunen dürfen, solche bei den Indiern angetroffen zu haben, von denen sie uns durch die Araber überliefert wurde; vielmehr müssen wir uns wundern, daß mächtige und aufgeklärte Nationen diese Ziffernsprache nicht gekannt, oder solche wenigstens von den Nachbarvölkern nicht entlehnt hatten. Die Römer, deren Zahlensprache mit der unsrigen übereinstimmend war, besaßen eine ganz andere Art und Weise, die Zahlen zu schreiben; auch die Griechen hatten ihr ganz eigenthümliches Ziffernsystem.

Anmerkung. Die Methode, alle Zahlen mit zehn Ziffern zu schreiben, heißt das decadische Zahlensystem und zehn die Grundzahl oder Basis desselben. Das Einfache und Sinnreiche dieser Methode verdient, wie der Verfasser sehr richtig bemerkt, im höchsten Grade unsere Bewunderung; daß solche aufzufinden, dem Genie eines Archimedes, eines Apollenius, eines Diophantes nicht geglückt sei, könnte uns wohl einigermaßen befremden, wenn wir nicht durch die Geschichte der Wissenschaften erfahren hätten, daß gerade das Einfache öfters von dem menschlichen Geiste am spätesten gefunden ist.

Mit den zwei Zeichen 0 und 1 könnte man schon sämmtliche Zahlen schreiben; der Stellenwerth der Ziffer 1 wird dann immer zweimal größer, wenn sie von der Rechten nach der Linken um eine Stelle weiter gerückt wird. Dieses System wird das dyadische Zahlensystem genannt. Wollte man zwölf als Basis annehmen, so müßte man noch zwei besondere Zeichen für die Zahlen zehn und elf haben; für erstere wähle man das Zeichen a und für die zweite das Zeichen b. In diesen beiden Systemen werden dann nachstehende Zahlen auf folgende Art geschrieben:

Zehntheiliges System.	Zweitheiliges System.	Zwölftheiliges System.
1	1	1
4	100	4
10	1010	a
12	1100	10
25	11001	21
31	11111	27

In jedem System braucht man überhaupt eben so viel Ziffern, als die Grundzahl Einheiten enthält.

Man sehe: Montucla histoire des mathématiques, Tome I.
La Place système du monde.
Crelle Journal für die reine und angew. Math. Band 4. Heft 3.

Von der Addition.

§. 8. Um zwei Zahlen, z. B. 5 und 4 zu addiren, müssen wir (§. 2.) von einer dieser Zahlen jede der in ihr enthaltenen Einheiten stufenweise wegnehmen, und solche dann der andern hinzufügen, welche Operation geschieht, wie folgt: $5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1 = 9$. Man sieht, daß dies Verfahren für einigermaßen große Zahlen sehr beschwerlich sein würde; wir werden es daher nur für die einziffrigen Zahlen vorschreiben und zu gleicher Zeit annehmen, daß wir durch die Gewohnheit belehrt sind, das Resultat von $5 + 4 = 9$, von $8 + 3 = 11$ und alle andern derlei Art auf der Stelle zu finden. Um die Summe der beiden Zahlen 24 und 37 zu erhalten, zerlegen wir sie vorerst in $20 + 4$ und $30 + 7$; die gesuchte Summe ist $20 + 30 + 4 + 7$. Die beiden ersten Theile sind offenbar so viel als 2 Zehner + 3 Zehner oder 5 Zehner. Die Summe ist also $50 + 11$ oder $50 + 10 + 1 = 60 + 1$. Man sieht hieraus, daß man die Zusammenfügung der Zehner und Einer der vorgelegten Zahlen einzeln vornehmen muß. Diese Schlußweise ist allgemein anwendbar. Es seien z. B. $3731 + 349 + 12487 + 54$; indem man die Summe der Einer, dann die der Zehner, darauf die der Hunderte rc. bildet, erhält man 15 Tausende + 14 Hunderte + 20 Zehner + 21 Einheiten, oder $15000 + 1400 + 200 + 21$, oder wenn man mit diesen Zahlen ebenso verfährt, 16 Tausende + 6 Hunderte + 2 Zehner + 1 oder 16621. Diese Rechnung wird bedeutend erleichtert, wenn man, wie

hier unten geschehen, verfährt: die Zahlen nämlich so untereinander schreibt, daß die Ziffern einer und derselben Ordnung in einer und derselben Columne zu stehen kommen:

3731
349
12487
54
16621

Die Summe der Zahlen jeder einzelnen Columne wird unter den Querstrich angeschrieben, sobald sie 9 nicht übersteigt; im andern Falle werden nur die Einer angesetzt, die Zehner zurückbehalten, um sie wie einfache Einheiten den Zahlen der nächstfolgenden Columne nach der Linken zuzuzählen, was uns bestimmt, mit der Columne auf der rechten Seite den Anfang zu machen. Hier einige Beispiele:

5783	77756	10376786	5784201
4318	3388	789632	749832
5987	9763	589	14378539
8527	90257	73	20912572
24615	181164	11167080	

In dem ersten verfährt man, wie folgt: 3 + 8 machen 11, 11 + 7 geben 18, 18 + 7 sind gleich 25, Summe der Einer 3 + 8 + 7 + 7. Man setzt 5 unter den Strich in die erste Stelle zur Rechten und vereinigt die 2 Zehner mit der folgenden Columne, und sagt dann 2 + 8 machen 10, plus 1 geben 11, plus 8 geben 19, plus 2 geben 21. Man schreibt 1 hin und behält die 2 Zehner zurück, um sie den Hunderten zuzufügen: 2 + 7 = 9, 9 + 3 = 12 u. s. w., man hat 26 Hunderte, schreibt 6 hin und behält 2 zurück. Endlich findet man 24 in der vierten Columne; man setzt die 4 hin und rückt die 2 nach der Linken vor, d. h. man schreibt 24 Tausende. Die Summe ist 24615.

Von der Subtraction.

§. 9. Einige Uebung im Addiren reicht hin, die Differenz zwischen einfachen Zahlen zu finden. Z. B. die Zahl, die zu 3 addirt, die Summe 7 gibt, ist 4; also 7 — 3 = 4. Man kann auch zu diesem Resultate gelangen, wenn man von 7 so viel Einheiten wegnimmt,

als 3 deren enthält: 7 — 3 = 6 — 2 = 5 — 1 = 4. Wir wollen daher voraussetzen, man wisse die Subtraction mit kleinen Zahlen vorzunehmen.

Legen wir uns nun ein mehr zusammengesetztes Beispiel vor: 695 — 243. Es ist einleuchtend, daß, insofern die Zahl bekannt wäre, die zu 243 addirt die Summe 695 gibt, 3 + den Einern dieser Zahl, 4 + ihren Zehnern, 2 + ihren Hunderten die Zahl 695 hervorbringen müßten. Man schreibt daher, wie bei der Addition, die vorgelegten Zahlen, die kleinere unter die größere, zieht dann jede untere Ziffer von der ihr entsprechenden oberen ab; man sagt: 5 — 3 = 2, 9 — 4 = 5, 6 — 2 = 4, und 452 wird die gesuchte Differenz sein.

Es kann sich zutragen, daß die untere Ziffer die obere übertrifft; in dem nebenstehenden Beispiele kann man 8 nicht von 7 abziehen. Weil nun 36147 die Summe von 19328 + der gesuchten Zahl ist, so ist klar, daß, bei der Bildung der Summe der ersten Columne, 8 + den unbekannten Einheiten nicht 7, sondern 17 als Summe gegeben haben, wobei dann der Zehner zurückbehalten wurde, um ihn der folgenden Columne beizufügen. Man darf daher nicht sagen 7 — 8, sondern 17 — 8 = 9, und diese Ziffer 9 dann in die Stelle der Einer schreiben.

$$\begin{array}{r} 36147 \\ \underline{19328} \\ 16819 \end{array}$$

Setzt man die Addition weiter fort, so ist die Ziffer 4 der folgenden Columne entstanden aus dem zurückbehaltenen Zehner der Ziffer 2 und der gesuchten Ziffer der Zehner; d. h. wird die letztere zu 2 und 1 addirt, so muß man 4 erhalten; man darf also nicht sagen 4 — 2, sondern 4 — 3 = 1, welche man an die Stelle der Zehner zu setzen hat. Ebenso wird man bei den Hunderten, anstatt 1 — 3, sagen: 11—3 bleibt 8, die man ansetzt; 1 wird aber zurückbehalten und zu der 9 in der folgenden Stelle addirt, also 6 — 10, oder vielmehr 16 — 10 = 6; 1 für die folgende Stelle zurückbehalten, wodurch 3 — 2 = 1. —

Ueberhaupt wird man die obere Ziffer, sobald sie kleiner als die ihr gehörige untere ist, um zehn vermehren und eins dann zurückbehalten und solches zu der nächstfolgenden unteren Ziffer addiren. Die obere Zahl ist zwar dadurch um zehn vermehrt worden, um eben so viel ist's aber auch die untere, was die Differenz keineswegs ändert (§. 4.). Aehnlicherweise wird man in dem nebenstehenden Beispiele sagen:

9 — 3 = 6; 2 — 7 geht nicht, dafür 12 — 7 = 5;	3000429
1 zurückbehalten gibt 4 — 6 (statt 4—5) geht nicht, dafür	2578573
14 — 6 = 8; 1 zurückbehalten gibt 0 — 9 (anstatt	421856

0 — 8) geht nicht, dafür 10 — 9 = 1; 0 — 8 geht nicht, dafür 10 — 8 = 2 u. s. w.

Anmerkung. In dem Falle, daß eine Ziffer des Subtrahend größer wäre, als die darüber stehende gleichnamige des Minuends, verfährt man auch folgendermaßen: man denkt sich letztere um 10 vermehrt, subtrahirt dann davon die Ziffer des Subtrahends, vermindert aber zugleich die nächstfolgende Ziffer des Minuends um eins.

Man nennt dies Verfahren das Borgen; daß von einer Ziffer eins geborgt ist, deutet man durch einen Punkt neben derselben an.

Daß diese und die oben angegebene Vorschrift auf eins und dasselbe hinausläuft, wird man leicht einsehen.

Hier einige Beispiele zur Uebung:

3000	6000	6000	150001	3375831
1296	4000	5999	76385	186943
1704	2000	1	73616	3188888

§. 10. Hat man eine Zahl von der Einheit mit so viel daran gehängten Nullen, als diese Zahl Ziffern hat, d. h. von 1000.... abzuziehen, so muß man die Ziffer der Einer von 10 und die übrigen Ziffern von 9 abziehen. Also 1000 — 259 wird gefunden, indem man sagt 10 — 9 = 1; 9 — 5 = 4; 9 — 2 = 7, woraus 1000 — 259 = 741. Eben so 1000000 — 279953 = 720047. Diese Rechnung ist so leicht, daß sie kaum als eine Rechnungsoperation angesehen zu werden verdient; sie wird angewandt, um eine Subtraction in eine Addition zu verwandeln. Die Art, wie solches geschieht, ergibt sich aus Folgendem: Man suche die Differenz 3487 — 259. Es ist klar, daß durch die Zerlegung von 3487 in 2487 + 1000 die verlangte Differenz unverändert bleibt; man hat demnach 2487 + 1000 — 259 = 2487 + 741 = 3228. Anstatt 259 abzuziehen, hat man also wirklich 741 addirt. Hieraus ist ersichtlich, daß man eine Zahl von einer andern auch dadurch abziehen kann, indem man die erste von 1 mit so viel daran gehängten Nullen, als dieselbe Ziffern zählt, abzieht, und zur zweiten

Zahl dies Resultat addirt, vorausgesetzt, daß in der Summe hernach eine Einheit in der auf die höchste Ordnung der abzuziehenden Zahl nächstfolgenden Ordnung weggenommen wird. Man zeigt diese letztere Subtraction durch $\bar{1}$ an, was in die fragliche Zifferordnung zu stehen kommt; die vorhergegangene Operation wird dadurch 3487 — 259 = 2487 + 741, eine Rechnung, die, wie sie neben steht, ausgeführt wird. Zu bemerken ist, daß $\bar{1}741$ zu 259 addirt 0 gibt, oder $\bar{1}741 + 259 = 0$.

2487
$\bar{1}741$
3228

Die Größe $\bar{1}741$ wird die arithmetische Ergänzung (decadische Ergänzung, arithmetisches Complement) von 259 genannt. Um die decadische Ergänzung einer Zahl zu erhalten, muß man die Ziffer ihrer Einer von 10, ihre übrigen Ziffern aber von 9 abziehen und das Zeichen $\bar{1}$ auf die linke Seite schreiben. Die decadische Ergänzung einer Zahl, zur Zahl selbst addirt, gibt Null zur Summe.

Anstatt eine Zahl abzuziehen, kann man ihre arithmetische Ergänzung addiren. Bei mehreren auf einander folgenden Additionen und Subtractionen kann der Gebrauch der Ergänzungen von Nutzen sein; z. B. 32731 + 5729 — 4834 — 371 nimmt die hier unten angegebene Form an, da $\bar{1}629$ und $\bar{1}5166$ die arithmetischen Complemente von 371 und 4834 sind.

32731	32731
5729	5729
$\bar{1}629$	—371
$\bar{1}5166$	—4834
33255	Rest 33255

Räthlich ist's, die Anwendung der arithmetischen Complemente möglichst zu vermeiden und sich zu üben, die Additionen und Subtractionen nach Columnen einzeln vorzunehmen. So also sagt man in unserm Beispiele 9 + 1 = 10, 4 + 1 = 5; zieht 5 von 10 ab, schreibt 5 als Rest der Einer in die Stelle derselben; dann sagt man weiter: 3 + 2 = 5, 7 + 3 = 10; 5 — 10 geht nicht, folglich 15 — 10 = 5, welche in die Stelle der Zehner geschrieben wird, 1 dann zurückbehalten und zu den abzuziehenden Hunderten addirt rc.

Von der Multiplication.

§. 11. Wir wollen den Multiplicand voranschreiben: $4 \times 5 \times 2$ heißt also: 4 fünfmal, das Produkt 20 dann zweimal nehmen.

Weil 4×5 nichts anders ist, als $1 + 1 + 1 + 1$ fünf mal genommen, so reicht es hin, jede Einheit 5 mal zu nehmen, oder $5 + 5 + 5 + 5$ zu setzen; ein Ausdruck, der so viel ist, als 5 viermal genommen; folglich ist 4 mal 5 gleich 5 mal 4 oder $4 \times 5 = 5 \times 4$.

Diese Schreibart kann durch die Tafel A bildlich vorgestellt werden; solche besteht aus 5 Zeilen, jede mit 4 Einheiten. Es ist klar, daß die Anzahl der vorhandenen Einheiten 4 mal 5 ist. Wird die Tafel umgekehrt, wie B angibt, so findet man 5 mal 4 Einheiten; da nun die Zahl der Einheiten in beiden Fällen nothwendig dieselbe ist, so müssen 4×5 und 5×4 einerlei Produkt geben.

```
    . . . .
    . . . .
A   . . . .
    . . . .
    . . . .

    . . . . .
B   . . . . .
    . . . . .
    . . . . .
```

Es sei ferner $5 \times 4 \times 2$; 5×4 gibt $5 + 5 + 5 + 5$, welches Resultat noch zweimal zu nehmen ist, oder $10 + 10 + 10 + 10$, oder 10×4. Folglich $5 \times 4 \times 2 = 5 \times 2 \times 4$. Man kann also die zwei letzten Factoren mit einander verwechseln, gerade so, wie wir gesehen, man solches mit den zwei ersten thun konnte. Also $5 \times 4 \times 2 = 4 \times 5 \times 2 = 5 \times 2 \times 4 = 2 \times 5 \times 4 = 2 \times 4 \times 5 = 4 \times 2 \times 5$. Das Produkt bleibt demnach ungeändert, in welcher Ordnung man auch die Factoren nehmen mag.

Wir wollen diesen Satz für den Fall, wo die Anzahl der Factoren 3 übersteigt, beweisen; z. B. für $4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 9$. Wir wergen zeigen, daß der Factor 9 in der letzten Stelle des ersten Produktes irgend eine beliebige Stelle, und zwar vorerst die vorletzte, einnehnehmen kann; also: $4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 9 = 4 \times 5 \times 3 \times 9 \times 2$.

Die ersten Factoren $4 \times 5 \times 3$ geben in der That 60; darzulegen ist jetzt, daß $60 \times 2 \times 9 = 60 \times 9 \times 2$; dies ist aber so eben bewiesen worden.

Eben so kann man in dem Produkt $4 \times 5 \times 3 \times 9$ die 9 vor die 3 setzen, nämlich: $4 \times 5 \times 9 \times 3$ u. s. w.

Man sieht hieraus, daß man den letzten Factor nach und nach alle Stellungen einnehmen lassen kann, ohne das Produkt dadurch zu ändern, indem die übrigen Factoren ihre Ordnung beibehalten. Eben so kann nun aber der neue Endfactor 2 eine beliebige Stellung in jedem

dieser Resultate erhalten, nämlich: $4 \times 5 \times 9 \times 3 \times 2 = 4 \times 5 \times 9 \times 2 \times 3$ $4 \times 5 \times 2 \times 9 \times 3 =$ rc.

Als Endresultat ergibt sich, daß die Ordnung der Factoren willkührlich ist.

§. 12. Wenn man eine Zahl mehreremal mit sich selbst multiplicirt, wie $3 \times 3 \times 3 \times 3$, so sagt man, sie werde auf eine **Potenz** erhoben, deren **Grad** durch die Zahl der Factoren angezeigt und **Exponent** genannt wird. Hier ist 3 auf die vierte Potenz erhoben, was durch $3^4 = 81$ angedeutet ist; 4 ist der Exponent oder Grad. Eben so $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Die zweite Potenz wird auch das **Quadrat**, die dritte der **Cubus** genannt. 7^2 oder $7 \times 7 = 49$ ist das Quadrat von 7; $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$ ist der Cubus von 7. Die Zahl dagegen, welche mehreremal mit sich selbst multiplicirt oder mit dem Exponent versehen ist, heißt die **Wurzel**, so ist also 7 die **Quadrat**- oder **zweite Wurzel von** 49, die **Cubik**- oder **dritte Wurzel** von 343, die **vierte Wurzel** von 2401 rc. Diese Wurzeln werden durch das **Wurzelzeichen** $\sqrt{\ }$ angedeutet; in die Aeste desselben wird die Zahl geschrieben, welche anzeigt, die wievielste Wurzel verlangt ist.

$7^3 = 343$, woraus $7 = \sqrt[3]{343}$; $5^4 = 625$, woraus $5 = \sqrt[4]{625}$.

Handelt es sich um die zweite Wurzel, so läßt man die den Grad andeutende Ziffer 2 über dem Wurzelzeichen gewöhnlich weg, so daß $\sqrt{\ }$ und $\sqrt[2]{\ }$ eine und dieselbe Sache ausdrücken: $8^2 = 64$, folglich $8 = \sqrt{64}$; 8 ist die Wurzel oder die Quadratwurzel von 64.

§. 13. Da zur Multiplication einer Zahl (§. 3.) es hinreichend ist, sie so oft zu sich selbst zu addiren, als Einheiten in dem Multiplicator enthalten sind, so sieht man: 1) daß ein Produkt selbst mit 2, 3, 4.... multiplicirt wird, wenn man einen seiner Factoren mit 2, 3, 4.... multiplicirt. In der That, indem ich 12×5 anstatt 3×5 nehme, nehme ich jedesmal das Vierfache von 3, wenn ich 12 statt 3 addire; d. h. ich habe nun das Dreifache von 3 zu viel genommen; das Resultat wird also aus dem vervierfachten Produkt 3×5 bestehen; folglich ist 12×5 das Vierfache von 3×5, da 12 das Vierfache von 3 ist. Um 12 mit 5 zu multipliciren, kann man, wenn man will, 3 mit 5 und dann das Produkt 15 mit 4 multipliciren, weil $12 = 3 \times 4$ ist.

Dividirt man eben so einen der Factoren durch 2, 3, 4...., so wird das Produkt gleichfalls durch 2, 3, 4 dividirt werden.

2) Das Produkt bleibt ungeändert, wenn einer seiner Factoren multiplicirt, ein anderer zugleich aber durch dieselbe Zahl dividirt wird: $14 \times 8 = 7 \times 16$, weil $14 = 2 \times 7$ und $16 = 2 \times 8$.

3) Endigen die Factoren mit Nullen, so kann man solche ausser Acht lassen, insofern man dem erhaltenen Produkte hernach eine gleiche Anzahl von Nullen wieder anhängt. 300×20 wird 3×2, indem man die 3 Nullen wegläßt; dem Produkte 6 werden sie wieder angehängt; man hat $300 \times 20 = 6000$. In der That $300 \times 20 = 3000 \times 2$; denn 300 ist so verzehnfacht und 20 durch 10 dividirt. Bei der Addition von 3000 zu sich selbst verbleiben aber die drei Nullen in der Summe der drei ersten Columnen; die folgende Columne gibt $3 \times 2 = 6$; 6000 ist folglich das verlangte Produkt.

§. 14. Wir wollen jetzt die Multiplication mit zwei gegebenen Zahlen auszuführen suchen. Es bieten sich hier drei Fälle dar:

Erster Fall. Die Factoren sind beide einstellig. Es sei deshalb folgendes Täfelchen, welches man dem Pythagoras zuschreibt, hier beigesetzt; um es zu bilden, setzt man die 9 ersten Zahlen in eine horizontale Zeile, fügt sodann jede Zahl neunmal nach und nach zu sich selbst hinzu, und schreibt diese Produkte in eine und dieselbe Columne; z. B. $4 + 4 = 8$, $8 + 4 = 12$, $12 + 4 = 16$, $16 + 4 = 20$, $20 + 4 = 24$ 2c.

Pythagoräische Tabelle oder Einmal-Eins.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Will man z. B. das Produkt 7 × 5 finden, so hat man nur, wie aus der Bildungsweise des Täfelchens folgt, in der ersten Zeile die Zahl 7 zu nehmen, in der entsprechenden Columne bis zu dem Fache dann herabzusteigen, welches in der Horizontallinie liegt, deren Anfangsziffer 5 ist; die in diesem Fache stehende Zahl ist das verlangte Produkt; so hat man 7 × 5 = 35. Es ist von Wichtigkeit, die Produkte der einfachen Zahlen auswendig zu wissen, um nicht bei dem Gebrauche derselben jedesmal genöthigt zu sein, zu diesem Täfelchen seine Zuflucht zu nehmen, das durch theilweise Additionen eigentlich nur entstanden ist.

Müßte man, der Definition zufolge, den Multiplicand so oft zu sich selbst addiren, als Einheiten in dem Multiplicator enthalten sind: so würde diese Operation für große Zahlen fast unausführbar werden. Wie solche sich dann auf die Multiplication der einfachen Zahlen zurückführen läßt, wollen wir nun sehen.

Zweiter Fall. Der Multiplicator allein ist einziffrig. Um z. B. 2967 mit 4 zu multipliciren, stelle ich mir für einen Augenblick vor, daß man die Addition von 2967 wirklich 4 mal vornehme, wie es hier neben geschehen. Die Columne der Einer enthält nur die Ziffer 7 und zwar 4 mal; diese Summe wird demnach 7 × 4 oder 28 sein, man setze 8 hin und behalte 2 zurück, um sie der Zehner Columne, aus der viermal geschriebenen Ziffer 6 bestehend, zuzufügen. Man muß also sagen 6 × 4 = 24; die vorher zurückbehaltenen 2 Zehner dazu gezählt, gibt 26, wovon man nur 6 hinschreibt und die 2 für das Folgende zurückbehält ꝛc.

$$\begin{array}{r} 2967 \\ 2967 \\ 2967 \\ 2967 \\ \hline 11868 \end{array}$$

Diese Operation führt zu folgender Regel: Multiplicire jede Ziffer des Multiplicands mit dem Multiplicator, auf der rechten Seite anfangend, schreibe die Einheiten jedes Produkts unter die Ziffer, die solches gegeben hat, behalte die Zehner desselben zurück, um sie zum folgenden Produkte zu addiren. Dies Verfahren ist eigentlich nichts anders als die Addition selbst; ausgenommen, daß man sich der Mühe überhebt, die zu addirenden Zahlen mehremal anzuschreiben.

Dritter Fall. Die beiden Factoren sind mehrstellig. 2372 mit 532 multipliciren ist nichts anders, als 2372 2 mal, 30 mal und 500 mal nehmen, und alle diese Partialprodukte addiren. 1) Man multiplizirt zuerst 2372 mit 2, wie so eben angegeben worden; 2) um

das Produkt mit 30 zu erhalten, multiplicirt man 2372 mit 3, hängt dem Partialprodukte auf der rechten Seite eine Null an (§. 13. 3°). Um endlich 2372 mit 500 zu multipliciren, multiplicirt man mit 5 und hängt zwei Nullen auf der rechten Seite an. Die Operation läßt sich auf die hier angegebene Weise anordnen. Da die Nullen bei der Addition von keinem Einfluß sind, so kann man sich der Mühe überheben, sie hinzuzuschreiben. Das Partialprodukt mit 3 ist nur um eine Stelle, das Produkt mit 5 um zwei Stellen von der Rechten zur Linken eingerückt worden. Hieraus folgt, daß man den einen Factor nach und nach mit jeder Ziffer des andern zu multipliciren hat. Jedes Partialproduktes erste Ziffer wird unter die Einheiten derjenigen Ordnung gesetzt, von welcher die Ziffer des Multiplicators ist, welche dieses Partialprodukt gibt; man addirt sodann sämmtliche Partialprodukte.

```
   2372
    532
-------
   4744  mit 2
  7116   mit 3
 11860   mit 5
-------
1261904
```

Die Multiplication mit zusammengesetzten Zahlen hängt also von dem Falle ab, wo der Multiplicator einziffrig ist, welcher Fall wiederum von denjenigen abhängig ist, wo jeder Factor nur eine Ziffer hat, d. h. von der pythagoräischen Tafel. Da eine gewisse Fertigkeit in der Ausführung derlei Operationen verlangt wird, so geben wir folgende Beispiele zur Uebung:

```
   886633   |     53687   |       5554444
      777   |       908   |         79765
---------   |  --------   |   -----------
  6206431   |    429496   |      27772220
 6206431    |  4831830    |     33326664
6206431     |  --------   |    38881108
---------   |  48747796   |   49989996
688913841   |             |  38881108
            |             |  -----------
            |             |  443050225660
```

Um die Zahl der Ziffern im Produkte zu bestimmen, nehmen wir an, daß man 3687 mit 968 zu multipliciren habe. Der Factor 968 ist > 100 und $<$ 1000; das Produkt wird also zwischen 368700 und 3687000 liegen, d. h. es wird 6 oder 7 Ziffern haben. Im Allgemeinen hat das Produkt zweier Zahlen entweder so viel Ziffern als beide Factoren zusammen, oder eine Ziffer weniger. Hat man 3, 4.... Factoren, so gibt eine ähnliche Ueberlegung die Grenzen der Größe des Produkts und die Anzahl der in ihm vorkommenden Ziffern.

Von der Division.

§. 15. So wie die Multiplication nichts anders als eine wiederholte Addition einer und derselben Zahl ist, so kann gleichfalls die Division als eine wiederholte Subtraction betrachtet werden. Der Quotient zeigt an, wie vielmal man den Divisor von dem Dividend abziehen kann. Denn wollte man 8 durch 2 dividiren, so ziehe man zuerst 2 von 8 ab, dann 2 vom Reste 6, 2 vom Reste 4, endlich 2 von 2, man erhält 0 zum Reste. Da 2 sich 4 mal von 8 wegnehmen ließ, so kann man 8 aus 4 mal 2 bestehend ansehen; folglich ist 4 der Quotient, woraus folgt, daß der Quotient, welcher anzeigt, wie viel mal eine Zahl genommen werden soll, um ein Produkt zu bilden, zu gleicher Zeit auch angibt, wie viel mal der Divisor in dem Dividend enthalten ist, oder was auf dasselbe hinausläuft, der Dividend enthält den Divisor so vielmal, als Einheiten in dem Quotient vorhanden sind. Will man also 8 in 2 gleiche Theile theilen, so muß man 8 durch 2 dividiren; der Quotient 4 drückt die Größe jedes Theils aus. Der Dividend ist nichts anders als das Produkt einer Multiplication, deren beide Factoren der Divisor und Quotient sind (§. 13.). Aus der Definition und mehrern bekannten Eigenschaften (§. 13.) geht hervor:

1) Der Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt: 36 : 9 gibt denselben Quotienten wie 72 : 18, wie 12 : 3.

2) Endigen Dividend und Divisor mit Nullen, so kann man eine gleiche Anzahl davon in beiden weglassen, ohne dadurch den Quotienten zu ändern: 6000 : 200 und 60 : 2 geben einen und denselben Quotienten 30.

3) Multiplicirt man bloß den Dividend, so wird der Quotient mit derselben Zahl multiplicirt; multiplicirt man den Divisor, so wird der Quotient dividirt. Wollte man z. B. 24 durch 3 dividiren, so wird der Quotient 8 sein, oder $24 : 3 = 8$; verdoppelt man aber 24, so wird der Quotient verdoppelt, $48 : 3 = 16$; verdoppelt man dagegen 3, so wird der Quotient auf die Hälfte reducirt, $24 : 6 = 4$. Endlich $48 : 6 = 8$, d. h. der Quotient bleibt derselbe, wenn Dividend und Divisor zu gleicher Zeit verdoppelt werden.

4) Will man mehrere auf einander folgende Divisionen ausführen, so ist die Ordnung, in der sie vorgenommen werden, willkührlich; man kann sie sämmtlich auf eine einzige reduciren, wenn man das Produkt aller Divisoren nimmt. Hat man z. B. 24 durch 2 zu dividiren, den

Quotienten 12 dann durch 3; so erhält man 4 als Resultat. Hätte man dagegen anfänglich durch 3, dann durch 2 dividirt, oder auf der Stelle durch 3×2 oder 6, so würde man ebenfalls 4 gefunden haben. Es rührt dies unmittelbar von der Division durch 2 und durch 3 her, welche die Unterdrückung der Factoren 2 und 3 in 24 verlangt, welche Zahl das Produkt von $2 \times 3 \times 4$ oder von $3 \times 2 \times 4$ ist. Dieselbe Schlußweise gibt: $(6 \times 4) : (3 \times 2) = (6 : 3) \times (4 : 2) = 6 : (2 \times 3) \times 4$.

§. 16. Der Quotient $35 : 7$ ist 5, weil $35 = 7 \times 5$. Will man aber 38 durch 7 dividiren, so zerlege man 38 in $35 + 3$ oder $38 = 7 \times 5 + 3$; die Division läßt sich nicht mehr genau ausführen; 35 ist bloß das größte in 38 enthaltene Produkt von 7; 3 ist der Rest bei dieser Division.

Wenn man die fortlaufenden Produkte einer Zahl mit 1, 2, 3... bildet, so werden sämmtliche Resultate durch diese Zahl theilbar oder Vielfache von ihr sein. So ist 35 ein Vielfaches von 7, oder theilbar durch 7, während 38 es nicht ist.

Nimmt man zum Dividend oder Divisor irgend zwei beliebige Zahlen, so muß man eigentlich sagen: Der Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, gibt ein Produkt, das, zum Reste addirt, den Dividend hervorbringt. Der Rest ist übrigens kleiner als der Divisor, weil, wenn dieser in jenem enthalten wäre, das Produkt des Divisors mit dem Quotienten nicht das in dem Dividend enthaltene größte Vielfache geben würde. — Multiplicirt man die ganze Gleichung $38 = 7 \times 5 + 3$ mit einer Zahl, z. B. 4, so hat man $152 = 28 \times 5 + 12$; der Quotient der Division von 152 durch 28 und der von 38 durch 7 ist gleicherweise 5; der Rest dagegen ist 4 mal größer geworden. Wird also Dividend und Divisor mit einem und demselben Factor multiplicirt, so wird der Quotient nicht geändert, der Rest ist aber durch diesen Factor multiplicirt worden. Es seien 34 und 24 zwei Zahlen, welche, durch 5 getheilt, einen und denselben Rest 4 geben; ihre Differenz 10 muß ein Vielfaches von 5 sein; denn $34 = 6 \times 5 + 4$ und $24 = 4 \times 5 + 4$; werden diese beiden Gleichungen von einander abgezogen, so hat man $10 = 2 \times 5$.

§. 17. Die pythagoräische Tafel dient zur Auffindung des Quotienten, wenn er sowohl als der Divisor einstellig ist. Wollte man z. B. 35 durch 7 theilen, so braucht man nur in der Verticalcolumne

der Zahl 7 bis zum Fache, das 35 enthält, herabzusteigen; demselben entspricht die Horizontallinie, die mit 5 anfängt, so daß $35 = 7 \times 5$; 5 ist also der gesuchte Factor oder Quotient. — Um 65 durch 9 zu dividiren, erhält man, da 65 in der 9ten Columne nicht anzutreffen ist, dafür aber 63 und 72 gefunden wird, zwischen denen 65 liegt, $65 = 7 \times 9 + 2$; 7 ist der Quotient und 2 der Rest. In der Ausführung derlei Divisionen muß man sich einige Uebung erworben haben, um der Mühe überhoben zu sein, zu dem Pythagoräischen Täfelchen seine Zuflucht zu nehmen.

§. 18. Gehen wir jetzt zu den zusammengesetzten Divisionen über.

Erster Fall. Der Divisor hat nur eine Ziffer. — Es werde verlangt, 40761 durch 7 zu dividiren, d. h. eine Zahl zu finden, welche mit 7 multiplicirt 40761 wieder hervorbringt. Wäre diese Zahl bekannt, so müßten bei der Multiplication ihre Einer zum Produkte 1 geben. Indem die Zehner zurückbehalten wurden, um sie zu dem folgenden Produkte hinzuzufügen, würde man ähnlicherweise die Zehner 6 finden; das Produkt der Hunderte gäbe so 7; das der Tausende endlich 40. Der Quotient enthält keine Zehntausende, weil 10000×7 zum Produkte 70000 gibt, das größer als 40761 ist. Hieraus folgern wir, daß 40 das Produkt von 7 mit der Ziffer der Tausende des Quotienten enthält, ausserdem aber noch dasjenige, was bei den Hunderten zurückgehalten und jenem Produkte hinzugefügt worden ist. Das größte in 40 vorhandene Vielfache von 7 ist 35, oder 7 mal 5; diese 40 liegen zwischen den Produkten 7×5 und 7×6. Multiplicirt man nun 7 einerseits mit 5000, anderseits mit 6000; so erhält man zwei Produkte, von denen das eine kleiner, das andere größer als 40761 ist; der verlangte Quotient liegt folglich zwischen 5000 und 6000, d. h. die Ziffer der Tausende ist 5, und wird durch das größte in 40 enthaltene Vielfache von 7 angegeben. Zieht man jetzt das Vielfache 35 von 40 ab, so wird der Rest 5 das bei der Multiplication der Hunderte des Quotienten mit dem Divisor Zurückbehaltene darstellen. Fügt man daher die noch übrigen Ziffern 761 des Dividends diesem Reste bei, so wird 5761 das Produkt der noch unbekannten Theile des Quotienten mit 7 ausdrücken; es kommt jetzt nur darauf an, 5761 durch 7 zu dividiren, eine Aufgabe, welche der vorgelegten ähn-

```
40761 | 7
35    | 5823
----
 57
 56
 ---
  16
  14
  ---
   21
   21
   ---
    0
```

lich ist und dieselbe Schlußweise zuläßt. Man dividire daher durch 7 die 57 Hunderte, oder vielmehr das größte in 57 enthaltene Vielfache von 7; der Quotient 8 ist die Ziffer der Hunderte des Quotienten; man schreibt sie auf die rechte Seite von 5, der Ziffer der Tausende im verlangten Quotienten. Bemerkt kann werden, daß es unnöthig ist, den ganzen Theil 761 des Dividends neben den Rest anzuschreiben, daß es vielmehr zur Bildung des Partialdividends hinreichend ist, die Ziffer 7 der Hunderte neben die 5 zu setzen. Wird 8 mit 7 multiplicirt, das Produkt 56 von 57 abgezogen, so kommt der Rest 1 von demjenigen her, was bei den Zehnern zurückbehalten worden. Wird 61 diesem Reste 1 beigefügt, so ist 161 das Produkt der Zehner und der Einer des Quotienten mit dem Divisor 7; um diese zu finden, muß man 161 mit 7 dividiren u. s. f. Der gesuchte Quotient ist 5823. Man findet, wie man sieht, eine Ziffer des Quotienten nach der andern, indem man mit der höchsten Ziffer desselben den Anfang macht, dabei jedesmal die nächstfolgende Ziffer des Dividends zu dem etwa gebliebenen Reste herabsetzt, und das in der so gebildeten Zahl enthaltene größte Vielfache des Divisors nimmt.

Bei einiger Fertigkeit in dieser Rechnungsart sieht man bald ein, daß es unnöthig ist, in einer so einfachen Operation jedes abzuziehende Produkt besonders hinzuschreiben, indem dergleichen Subtractionen auf der Stelle zu bewerkstelligen sind. Hat man also gefunden, daß 40 : 7 die Ziffer 5 der Tausende des Quotienten gibt, so multiplicirt man 5 mit 7, zieht das Produkt 35 von 40 ab, schreibt den Rest 5 unter die 0 des Dividends, setzt zu diesem Reste die 7 Hunderte des Dividends, dividirt 57 durch 7 ꝛc. Die Operation läßt sich so in nebenbeistehender Form anordnen:

40761	7
57	5823
16	
21	
0	

Eine Abkürzung erhält sie noch dadurch, daß man nicht jeden Rest mit der nächstfolgenden Ziffer des Dividends anschreibt; z. B. 40 : 7 gibt 5, welche Ziffer unter den unter dem Divisor 7 gezogenen Strich angesetzt wird; man zieht das Produkt 7 × 5 oder 35 von 40 ab, behält im Gedächtniß den Rest 5, um neben ihn die Ziffer 7 der Hunderte zu setzen; 57 : 7 gibt 8; 7 × 8 = 56 von 57 abgezogen läßt 1 zum Reste; neben ihn die 6 Zehner des Dividends herab gibt 16; 16 : 7 = 2 u. s. w. Die einfache Darstellung dieser Rechnung ist die oben angegebene.

Einige andere Divisions-Beispiele sind:

$$\begin{array}{r|l} 12538 & 2 \\ \hline & 6269 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8765 & 5 \\ \hline & 1753 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 97587 & 7 \\ \hline & 13941 \end{array}$$

Zweiter Fall. Der Divisor ist eine mehrziffrige Zahl. — Es werde verlangt, 1916 durch 329 zu dividiren. Da $329 \times 10 = 3290$, dieß Produkt aber größer als der Dividend 1916 ist, so muß der Quotient kleiner als 10, demnach einziffrig sein. Nehmen wir ihn als bekannt an, und leicht wird man ihn dadurch finden, daß man successive die Produkte von 329 mit 1, 2, 3.... bildet, bis man zu einem solchen gelangt, das gleich 1916 ist, oder, von 1916 abgezogen, einen Rest gibt, der kleiner als der Divisor 329 ist. Es sei 5 dieser Quotient; daher $1916 = 329 \times 5 + \text{Rest}$. Multiplicirt man nun mit 5 die 9 Einer, die 2 Zehner und die 3 Hunderte, addirt dazu den Rest, so muß man den Dividend wieder hervorbringen. Die nebenstehende Rechnung zeigt, daß die 19 Hunderte des Dividends entstanden sind: 1) aus dem Produkte 15 der 3 Hunderte des Divisors mit dem angenommenen Quotienten 5; 2) aus dem, was bei der Multiplication der 2 Zehner des Divisors mit dem Quotienten zurückbehalten worden; 3) aus den Hunderten, die von der Addition des Restes 271 herkommen.

	329
	5
Produkt	1645
Rest	271
	1916

Könnte man die beiden letztgenannten Antheile von 19 wegnehmen, so wäre der Ueberschuß 15 offenbar das genaue Produkt der 3 Hunderte des Divisors mit der Quotientenziffer; die Division von 15 durch 3 würde diese Ziffer alsdann bestimmen. Da man aber den gedachten doppelten Antheil von 19 nicht abziehen kann, indem man ihn anfangs nicht kennt; so dividirt man 19 durch 3, nimmt also zum Dividend eine zu große Zahl. Der auf diesem Wege gefundene Quotient kann falsch, jedoch nie zu klein genommen sein. In unserm Beispiele erhält man 6 aus 19 : 3; da aber $6 \times 329 = 1974 > 1916$, so ist der angenommene Quotient 6 zu groß. Man versucht daher 5; das Produkt $5 \times 329 = 1645 < 1916$; 5 ist demnach nicht zu groß, folglich 5 der verlangte Quotient. 1645 von 1916 abgezogen, bleibt 271 als Rest. Hieraus können wir folgende Regel ziehen, im Falle der Quotient < 10 oder einziffrig ist:

Man läßt zur Rechten des Dividends und des Divisors eine gleiche Anzahl Ziffern weg, verrichtet die Division mit den übrig gebliebenen Zahlen; der so erhaltene Quotient wird der verlangte

sein oder ihn übertreffen; die Multiplication dient zur Prüfung seiner Richtigkeit.

Hier einige Beispiele zur Uebung. In dem ersten dividirt man 72 durch 8; die Multiplication zeigt, daß der Quotient 9 zu groß ist; man reducirt ihn daher auf 8.

	72320	8369	386782	99887	823945	82476
Produkt	66952	8	299661	3	742284	9
Rest	5368		87121		81661	

Anmerkung. Wenn die zweite Ziffer des Divisors auf der Linken 5 übersteigt, so führt meistens der Versuch einen zu großen Quotienten herbei, weil nämlich zur Hervorbringung des Dividends, bei der Multiplication des Divisors mit dem Quotienten, das Produkt der ersten Ziffer links im Divisor zu den zurückbehaltenen Zehnern addirt werden muß. Es sei zum Beispiel 1435:287. Sagt man 14:2 gibt 7, so wird dieser Quotient 7 zu groß sein, indem, bei der Multiplication von 287 mit 7, das Produkt 2 × 7 der Hunderte um die zurückbehaltenen 6, von 87 × 7 herkommend, vermehrt werden muß. Nimmt man aber 5 zum Quotienten, so wird, weil 87 × 5 zum Zurückbehalten 4 liefert, und 14 — 4 durch 2 dividirt in der That 5 gibt, 5 offenbar der gesuchte Quotient sein. —

Setzte man 300 an die Stelle von 287, so wird der Quotient 1435:300 zu gering sein, weil der vermehrte Divisor nicht so oft in dem Dividend 1435 enthalten ist.

Ist die zweite Ziffer des Divisors, von der Linken an gerechnet, größer als 5, und will man weitläufige Versuche vermeiden: so vermehre man die erste Ziffer um 1, um den Quotienten vorläufig zu erhalten. Bei der darauf erfolgenden Prüfung dieses Quotienten mittelst der Multiplication ist der gegebene Divisor wieder herzustellen. Der Irrthum, wenn ein solcher statt findet, besteht darin, eine zu geringe Ziffer als Quotienten gegeben zu haben. Dieser Irrthum wird übrigens durch einen Rest angedeutet, der größer als der Divisor ist. In dem Falle, welchen wir hier betrachten, kann es zuweilen von Nutzen sein, Dividend und Divisor zu verdoppeln, zu verdreifachen .... bis die zweite Ziffer des letztern kleiner als

5 ist. Der Quotient wird durch diese Rechnung nicht geändert. (§. 13.) F.

Es werde nun verlangt 191687 durch 329 zu dividiren. Ich sondere auf der linken Seite von dem Dividend einen solchen Theil 1916 ab, welcher den Divisor enthalten kann, dividire dann 1916 durch 329 nach der vorhergehenden Regel; der Quotient ist 5, er gibt das Produkt 1645 und den Rest 271; ich schreibe diese Zahlen, wie hier neben angegeben ist. Die Zahl 5 ist die erste Ziffer des Quotienten und stellt Hunderte oder 500 vor, weil 1916 auch Hunderte bedeuten. In der That liegt 1916 zwischen dem Divisor 329 × 5 und 329 × 6. Da der Theil 1916 Hunderte darstellt, so liegt der gegebene Dividend zwischen 500 × 329 und 600 × 329 (§. 13.). Der gesuchte Quotient besteht folglich aus 500 + den Zehnern + den Einern; es handelt sich jetzt darum, diese zu finden. Wird nun von dem Dividend das Produkt 329 mit 500, welche letztere Ziffer ein bekannter Theil des Quotienten ist, d. h. 1645 von 1916 abgezogen, zu dem Reste 271 der abgesonderte Theil 87 hinzugefügt: so ist einleuchtend, daß der Rest 27187 das Produkt von 329 mit den unbekannten Zehnern und Einern des Quotienten sammt dem Ueberschusse enthält; es kommt demnach nur darauf an, diese Zehner und Einer zu finden. — Man wendet bei dieser letzteren Aufgabe, welche der ursprünglich vorgelegten völlig ähnlich ist, ganz dieselbe Schlußweise an, und wird so zu ähnlichen Folgerungen geführt; man sondert demnach die erste Ziffer 7 auf der rechten Seite ab, d. h. man setzt nur die 8 zur Rechten des ersten Restes 271, was 2718 gibt, das noch durch 329 zu dividiren ist. Der Quotient 8 ist, aus den oben angegebenen Gründen, die Ziffer der Zehner. Von dem Partialdividend zieht man das Produkt 329 × 8 = 2632 ab, der Rest 867 kommt von dem Produkte 329 mit den Einern, ausserdem noch von dem Ueberschusse zwischen dem ganzen Dividend und einem genauen Vielfachen des Divisors. Dividirt man endlich 867 durch 329, so erhält man die 2 Einer und den Rest 209. Dies Verfahren kehrt stets wieder; es gibt nach und nach die verschiedenen Ziffern des Quotienten einer Schlußweise zufolge, die wenig von derjenigen verschieden ist, deren wir uns bei dem Dasein eines nur einziffrigen Quotienten bedient hatten. Faßt man das Vorige zusammen, so ergibt sich die Regel:

1916.87	329	
1645	582	
271 8		erster Rest
263 2		
8 67		2ter Rest
6 58		
2 09		3ter Rest

Um eine Division zu verrichten, nimm auf der linken Seite des Dividends die wenigstens erforderlichen Ziffern, damit die durch sie ausgedrückte Zahl den Divisor enthalte, dividire diese Zahl durch den Divisor; der Quotient, der einziffrig ist, wird die erste Ziffer des Quotienten zur Linken sein; ihre Ordnung ist einerlei mit der Ordnung der Einheit des Partialdividend. Diesen Quotienten multiplicire mit dem Divisor, ziehe das Produkt von dem Partialdividend ab, zur Rechten des Restes setze die folgende Ziffer des gegebenen Dividends herunter, suche, wie vorher, wie vielmal der Divisor in diesem Partialdividenden enthalten ist; die gefundene Zahl ist die zweite Ziffer des Quotienten und zwar von der Ordnung der herunter genommenen Ziffer. Auf diese Weise setze die Rechnung fort, bis sämmtliche Ziffern des Dividends erschöpft sind. — Trifft man einen Partialdividend, der den Divisor nicht enthält, so darf man nicht vergessen, eine Null in den Quotienten zu schreiben, ehe man eine zweite Ziffer des Dividends heruntersetzt. Anstatt jedes Produkt besonders zu schreiben und abzuziehen, ist es kürzer, die Multiplication und Subtraction auf einmal zu verrichten. Sollte man z. B. 329 mit 5 multipliciren und von 1916 abziehen, so könnte man folgendermaßen verfahren: $5 \times 9 = 45$ Einheiten lassen sich nicht von 6 Einheiten des Dividends 1916 abziehen; man addire daher 4 Zehner zu den 6 Einheiten und sage: $46 - 45 = 1$, die unter die 6 geschrieben werden. Dadurch ist aber 1916 um 40 größer geworden; damit die gesuchte Differenz ungeändert bleibe, muß 40 ebenfalls dem Subtrahend hinzugefügt, d. h. 4 Zehner zurückbehalten und zu dem nächstfolgenden Produkte $2 \times 5 = 10$ addirt werden. Man hat nun 14 von 1 Zehner wegzunehmen, dafür sagt man: nimm 14 von 21 weg, die übrigbleibende Ziffer 7 schreibe unter 1 und behalte die 2 hinzugefügten Zehner zurück; endlich $5 \times 3 + 2 = 17$, $19 - 17 = 2$; man hat so den ersten Rest 271.

Um von 2718 das Produkt 329×8 abzuziehen, sagt man ebenso: $8 \times 9 = 72$; 70 zu den 8 Einheiten addirt gibt $78 - 72 = 6$, welche Ziffer man in die Stelle der Einer schreibt und 7 zurückbehält. Dann werden $2 \times 8 + 7 = 23$ von 1 oder vielmehr 31 abgezogen, wobei 8 bleibt, welches man unter 1 schreibt und 3 zurückbehält. Endlich

$3 \times 8 + 3 = 27$ von 27 abgezogen bleibt 0, welche nicht angeschrieben zu werden braucht. Die Operation nimmt dann die hier angegebene abgekürzte Gestaltung an.

```
1916.87 | 329
 271 8  | 582
   8 67
   2 09  Rest.
```

Einige andere Divisionsexempel:

```
     72312.146 | 8369          386782.67 | 99887
      5360 1   | 8640           87121 6  | 387
       338 74                    7212 07
         3 986           Rest .   219 98
Rest  .  3 986
```

```
      82394568708.9 | 8247685671              721.342 | 291
       8165397669 9 | 99                       139 3  | 2478
Rest  . 742480566 0                              22 94
                                                  2 572
                                         Rest  .    244
```

```
      700200.031 | 683679          25677.875 | 2568
       16521 03  | 1024             2565 8   | 9999
        2847 451                     254 67
Rest  .  112 735                      23 555
                               Rest  .    443
```

Anmerkung. Diese Art zu rechnen, kann auch zur Prüfung der Richtigkeit einer jeden Ziffer im Quotienten dienen. Man verrichtet alsdann die angegebene Operation in umgekehrter Ordnung, d. h. von der Linken zur Rechten. Ist irgend eine Subtraction unmöglich, so wird es um so mehr sein, wenn man auf der rechten Seite anfängt, weil die abzuziehenden Produkte um das vermehrt sind, was hier zurückbehalten worden.

Für $\frac{1916}{328}$ also hat man $\frac{19}{3}$; es handelt sich darum, die erhaltene Ziffer 6 zu prüfen, d. h. sich zur vergewissern, ob das Produkt 328×6 kleiner als 1916 ist, in welchem Falle 6 nicht zu groß ist. Wir multipliciren sie daher vorerst mit den Hunderten, und sagen $3 \times 6 = 18$, von 19 abgezogen, läßt 1, was zur folgenden Ziffer 1 addirt 11 Zehner gibt, von denen man das Produkt der Zehner 2×6 oder 12 nicht abziehen

kann; der Quotient ist demnach zu groß, man muß daher 5 untersuchen.

Zu bemerken ist, daß bei jeder einzelnen Multiplication keine der zurückbehaltenen Zahlen den zu prüfenden Multiplicator übersteigen kann; ist derselbe 5, so müßte der andere Factor wenigstens 10 sein, wenn das Produkt die 50 übertreffen sollte. Macht man also die Probe nach der angegebenen Art, und findet man dabei einen Rest, der dem geprüften Quotienten wenigstens gleich ist: so kann man von der Möglichkeit der Subtraction an dieser Stelle und an den übrigen überzeugt sein, wenn die Operation von der Rechten zur Linken vorgenommen wird. Für $\frac{25643}{3572}$ z. B. sagt man $\frac{25}{3}$ gibt 8, was als zu groß erkannt wird; man muß daher 7 erproben, wie folgendermaßen geschieht: $3 \times 7 = 21$, von 25 abgezogen, bleibt 4; dieses der Ziffer 6 der Hunderte beigesetzt, gibt 46; darauf $7 \times 5 = 35$; $46 - 35$ gibt einen Rest > 7; 7 ist also der gesuchte Quotient. Ueberhaupt muß die Probe so weit fortgesetzt werden, bis man zu einer unmöglichen Subtraction oder zu einem Reste gelangt, der mindestens der geprüften Ziffer gleich ist. Im ersten Falle ist diese Ziffer dann zu groß; im zweiten dagegen ist sie es nicht. Bei dieser Art, die Ziffer zu prüfen, hat man selten nöthig, die Rechnung bis zu den Einern fortzusetzen; meistens erkennt man schon bei der zweiten Subtraction, ob sie richtig sei. F.

§. 19. Wir fügen noch folgende Bemerkungen hinzu:

1) Die Division ist die einzige der vier Regeln, welche auf der linken Seite ihren Anfang hat.

2) Die gefundene Zahl, welche anzeigt, wie viel mal der Divisor in einem Partialdividend enthalten ist, muß jedesmal in den Quotienten gesetzt werden. Um diese Zahl aber zu finden, besteht das angegebene Verfahren darin, den Divisor auf seine erste Ziffer zur Linken zu reduciren. Diese Operation kann in der That eine zu große Ziffer geben; der Irrthum liegt aber in dem Verfahren selbst und keineswegs in dem Prinzipe. Gewiß ist's indessen, daß die Ziffer des durch diese Partialdivision einmal erlangten Quotienten gerade auch die des gesuchten Quotienten ist.

3) Jede aus dem Dividend heruntergenommene Ziffer liefert eine solche in den Quotienten; beide sind von einerlei Ordnung, so daß

man von vorn herein die Anzahl der Ziffern im Quotienten angeben und die Ordnung einer jeden derselben bestimmen kann.

4) Jeder Partialquotient kann nicht größer als 9 sein, welches die größte einziffrige Zahl ist. Für $\frac{170}{19}$ z. B. fragt man in der That: wie viel mal 1 in 17? Weit aber davon entfernt, 17 anzusetzen, muß man 9 erproben; welche Ziffer hier noch zu groß gefunden wird. Der Quotient ist nur 8, den man auf der Stelle erhalten hätte, wenn man anstatt $\frac{17}{1}$ sagte $\frac{17}{2}$; was auch in der vorhergehenden Anmerkung vorgeschrieben wird.

5) Um jeden Irrthum zu vermeiden, ist es gut, jede Ziffer des Dividends mit einem Punkte zu bezeichnen, in so fern sie heruntergenommen wird.

Zerfällung der Zahlen in ihre Grundfactoren. Eigenschaften der gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen*).

§. 20. Eine Zahl, welche bloß durch die Einheit und durch sich selbst theilbar ist, wird Primzahl (Grundzahl) genannt; dergleichen Zahlen sind: 7, 11, 2, 1. Zwei Zahlen, wie 21 und 40, welche ausser der Einheit keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, werden Primzahlen unter sich genannt.

§. 21. Alle Vielfachen einer Zahl sind durch eine andere theilbar, sobald jene Zahl durch diese theilbar ist. Wenn 18 ein Vielfaches von 2 ist, so ist 3×18, was so viel als $18 + 18 + 18$ sagt, durch 2 theilbar, weil jeder Theil ein Vielfaches von 2 ist.

§. 22. Wir wollen das Produkt von 32 mit 157 bilden, die so erhaltene Zahl, nebst den zwei erstern sodann durch irgend eine andere, z. B. 9, dividiren und untersuchen, was daraus sich ergibt. Man zerlege deßhalb 32 in $9 \times 3 + 5$; multiplicirt man nun mit 157, so wird der erste Theil ein Vielfaches von 9 sein. Wenn man das verlangte Produkt durch 9 dividirt, wird also derselbe Rest bleiben, wie bei 5×157. Wird nun 157 ebenso zerlegt, nämlich in $9 \times 17 + 4$;

*) Bleibt bei der Division kein Rest, so heißt der Divisor ein Theiler des Dividends und man sagt: der Dividend ist theilbar durch den Divisor. (§. 16.)

darauf mit 5 multiplicirt und durch 9 dividirt, so wird der in Frage stehende Rest einerlei mit dem von 4×5 sein. Der Rest aus der Division eines Produktes ist folglich derselbe, wie der des Produktes der Reste der zwei Factoren.

§. 23. Bevor wir uns mit dem Auffinden der Theiler von Zahlen beschäftigen, einer Untersuchung von großer Wichtigkeit, wollen wir uns die Aufgabe vorlegen, die größte der Zahlen zu finden, welche zwei gegebene Zahlen, wie 312 und 132, zu gleicher Zeit theilt; oder mit andern Worten: ihren größten gemeinschaftlichen Theiler suchen.

Wäre 312 durch 132 theilbar, so würde letztere der größte gemeinschaftliche Theiler dieser zwei Zahlen sein, weil 132 durch keine größere Zahl, als sie selbst ist, getheilt werden kann. Verrichtet man daher diese Division $312 : 132$, so findet man den Quotienten 2 und den Rest 48, hat also $312 = 2 \times 132 + 48$. Wird diese ganze Gleichung durch irgend eine Zahl, z. B. 3 dividirt, die 312 und 132 theilt, so wird diese Zahl 3 auch 2×132 theilen. Da nun der Quotient von $48 : 3$, sammt dem Quotient $2 \times 132 : 3$, gleich dem Quotient $312 : 3$ ist, welche letzteren Quotienten beide ganze Zahlen sind, so folgt hieraus, daß jeder gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen auch ein Theiler des Restes ist, den man bei der Division der größeren durch die kleinere erhält.

Nehmen wir jetzt an, daß 12 der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler ist, und dividiren die obige Gleichung durch 12: so erhalten wir $26 = 2 \times 11 + 4$. Die Quotienten 26 und 11 müssen nun Primzahlen unter sich sein, weil sonst 12 nicht der größte gemeinschaftliche Theiler von 312 und 132 sein würde. Wäre zwischen 11 und 4 ein gemeinschaftlicher Theiler vorhanden, so müßte derselbe auch 26 theilen; folglich 26 und 11, was gegen die Annahme ist. 12 ist demnach der größte gemeinschaftliche Theiler von 312 und 132, und zu gleicher Zeit auch von 132 und 48.

Hieraus sieht man, daß unsere Aufgabe auf die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers von 132 und 48 zurückgeführt ist. Da $48 < 312$, so ist letztere Aufgabe die einfachere.

Durch eine ähnliche Schlußfolge wie bisher wird bewiesen, daß man 132 durch 48 dividiren müsse, und daß 48 der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler wäre, wenn diese Division aufginge. Da

man aber 36 als Rest findet, so ist dieser Theiler einerlei mit dem von 48 und 36. Dividirt man 48 durch 36, so wird man sehen, daß der verlangte größte gemeinschaftliche Theiler der von 36 und 12 ist (Rest der Division von 48 durch 36). Da nun 36 durch 12 getheilt wird, so ist 12 der größte gemeinschaftliche Theiler von 312 und 132. Man gibt der Rechnung die untenstehende Darstellung, in welcher jeder Rest zur Rechten des Divisors geschrieben ist, damit er den für die nächst vorzunehmende Division geeigneten Platz erhalte.

312	132	48	36	12
	2	2	1	3

Um also den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden, dividire man die größere durch die kleinere, sodann den Divisor durch den Rest, und fahre so fort, jeden Rest als Divisor des vorigen Restes zu benutzen, bis man zu keinem Reste mehr gelangt. Der letzte Divisor ist der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler.

Hier zwei Beispiele dieser Rechnung; das eine für 2961 und 799, das andere für 115 und 69. Die größten gemeinschaftlichen Theiler sind 47 und 23.

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2

115	69	46	23
	1	1	2

§. 24. Zu bemerken ist:

1) Da die Reste immer kleiner und kleiner werden, so gelangt man endlich zu einem gemeinschaftlichen Theiler, wäre er auch nur die Einheit. Ist der größte gemeinschaftliche Theiler 1, so sind die 2 gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich. Es findet dies für 50 und 21 statt. Unangenehm ist's, daß man nicht ein Merkmal hat, an dem man einen solchen Fall gleich anfangs erkennen kann; der Mühe, eine unnütze Rechnung verrichtet zu haben, würde man so überhoben sein.

2) Da der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen alle durch die Operation successive erhaltenen Reste theilt, so ist man überzeugt, daß, in so weit einer dieser Reste eine Primzahl ist, die den vorigen Rest nicht theilt, 1 der einzige Theiler der vorgelegten Zahlen sein wird. So findet man für 824 und 319 die Primzahl 53, welche in 133 nicht aufgeht. Es ist unnütz, diese Rechnung weiter fortzusetzen, um zu erfahren, daß 1 der gemeinschaftliche Theiler ist.

824	319	186	133	53	Primzahl.
	2	1	1	2	

3) Die vorige Beweisführung zeigt ferner, daß jeder Theiler von 312 und 132, z. B. 3, auch 48 theilt, dann auch 36 und 12, d. h. die durch die Operation nach und nach erhaltenen Reste. Es müssen daher sämmtliche Theiler von 12 auch 132 und 312 theilen, und zwar sind sie die einzigen, welche diese Eigenschaft besitzen, nämlich: 1, 2, 3, 4, 6 und 12. Jeder Theiler zweier Zahlen theilt folglich ihren größten gemeinschaftlichen Theiler. Man muß daher die Factoren des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen finden, wenn man ihre sämmtlichen Theiler finden will.

4) Wenn man im Laufe der Rechnung erkennt, daß eine Zahl zwei successive Reste theilt, so kann man diesen Factor im Dividend und Divisor weglassen und die Operation wie gewöhnlich fortsetzen. Hat man dann den größten gemeinschaftlichen Theiler gefunden, so muß er mit dem unterdrückten Factor multiplicirt werden. So sind 4830 und 3570 Vielfache von 10. Nimmt man daher 483 und 357 und verrichtet die Division, so erhält man zum Reste 126, der, so wie auch 357, durch 3 theilbar ist; läßt man diesen Factor weg, so hat man 119 und 42, deren größter gemeinschaftlicher Theiler 7 ist; der von 4830 und 3570 ist also $10 \times 3 \times 7 = 210$.

Erkennt man dagegen, daß einer der Reste eine Primzahl als Factor enthält, die den vorigen Rest nicht theilt, so kann man diesen Factor weglassen, ohne dadurch den gemeinschaftlichen Theiler zu ändern. Sucht man den größten gemeinschaftlichen Theiler von 2961 und 799, so sieht man, daß der Rest 564 ein Vielfaches von $12 = 3 \times 4$ ist; dagegen ist die Zahl 799 weder durch 3 noch durch 2 theilbar. Wird dieser Factor 12 weggelassen, so erhält man 47 anstatt 564 und findet dergestalt, daß 47 der verlangte größte gemeinschaftliche Theiler ist. Diese Folgerung ergibt sich aus dem, was wir in 3) gesagt haben.

§. 25. Ist das Produkt zweier Factoren durch eine Zahl theilbar, welche die relative Primzahl gegen einen der Factoren ist: so muß dieselbe den andern Factor theilen; z. B. 56×45 oder 2520 ist theilbar durch 15, welches die relative Primzahl gegen 56 ist. Man behauptet, daß 15 den Factor 45 theilt. Offenbar wird 15×45 durch 15 getheilt, desgleichen auch 56×45 (nach der Annahme). Also muß 15 ihren größten gemeinschaftlichen Theiler theilen (§. 24.), weil 56 und 15 nur 1 zum gemeinschaftlichen Theiler haben.

1) Zwei Factoren, die kleiner als eine gewisse Primzahl sind, können kein durch diese Zahl theilbares Produkt geben.

2) Das Produkt zweier Primzahlen kann, ausser der Einheit und diesem Produkte, bloß diese Zahlen als Theiler zulassen.

3) Mehrere Factoren $5 \times 8 \times 9 \times 11$ können kein durch eine Primzahl, z. B. 3, theilbares Produkt hervorbringen, wenn nicht wenigstens einer dieser Factoren durch 3 theilbar ist.

4) Ist ein Produkt durch eine Zahl, die keine Primzahl ist, theilbar, so müssen sämmtliche Factoren dieser letzteren unter denjenigen, die das Produkt ausmachen, sich vorfinden. So ist 70×10 durch 28 theilbar, weil $28 = 2 \times 2 \times 7$; der erste Factor 2 findet sich in $10 = 2 \times 5$, der zweite Factor 2, so wie 7, findet sich in $70 = 2 \times 7 \times 5$; der Quotient ist 5×5. Fehlt dagegen ein Factor des Divisors, so ist die Theilbarkeit durch den Divisor unmöglich. Ist demnach jeder Factor eines gegebenen Produktes in Bezug auf irgend eine Zahl eine Primzahl, so sind auch das Produkt und diese Zahl Primzahlen unter sich. Wenn die Factoren des Produktes Primzahlen unter sich sind, und eine Zahl durch jeden dieser Factoren theilbar ist: so wird sie auch durch das gedachte Produkt theilbar sein; deßgleichen durch die Produkte, welche man erhält, indem man diese Factoren 2 zu 2, 3 zu 3... miteinander verbindet.

§. 26. Eine gegebene Zahl kann nur durch ein einziges System einfacher Factoren (Grundfactoren, absoluter Primzahlen) hervorgebracht werden; z. B. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ kann nicht als das Produkt anderer einfachen Factoren gelten, wie z. B. $7 \times 11 \times 2$; denn in solchen Fällen wäre $2^3 \times 3^2 \times 5 = 7 \times 11 \times 2$; das erste Glied müßte demnach durch 7 theilbar sein, was dem im 4^0 Gesagten widerspricht. Es können daher in der Zahl nur die einfachen Factoren 2, 3 und 5 vorkommen. Es bleibt noch zu zeigen übrig, daß auch keine anderen Potenzen jener Factoren möglich sind, wie z. B. $360 = 2 \times 3^3 \times 5^2$; denn dann wäre $2^3 \times 3^2\, 5 = 2 \times 3^3 \times 5^2$, oder nach Hinweglassung der gemeinschaftlichen Factoren $2^2 = 3 \times 5$, was nach 4^0 unrichtig ist. Sind zwei Zahlen, wie z. B. 7 und 11, Primzahlen unter sich, so sind es auch irgend zwei Potenzen derselben, wie z. B. 7^3 und 11^4; denn hätten letztere einen gemeinschaftlichen Factor, so wäre derselbe es auch von 7 und 11.

Es sei ein vollständiger Cubus z. B. $8000 = 20^3$ gegeben. Zerlegt man 20 in 4×5, so ist 8000 der Cubus von 4×5; da bei der Multiplication

die Ordnung der Factoren gleichgültig ist, so hat man $8000 = 4^3 \times 5^3$, woraus man sieht, daß jeder Factor auf den Cubus erhoben ist. Man kann dasselbe, welches auch die Anzahl der Factoren sein mag, von jeder beliebigen Potenz aussagen. Soll daher eine Zahl eine vollständige Potenz sein, so wird bei der Zerfällung in ihre Grundfactoren ein jeder derselben mit einem Exponenten behaftet sein, der ein Vielfaches von dem Grade der Potenz ausmacht.

§. 27. Um eine Zahl in ihre Grundfactoren zu zerlegen, theile man sie vorerst durch 2, so oft es geht; die vorgelegte Zahl ist dann das Produkt einer Potenz von 2 mit einem bekannten, durch 2 nicht theilbaren Quotienten. Darauf versuche man die Theilbarkeit dieses Quotienten durch 3, so oft dieß möglich ist; er ist das Produkt einer Potenz von 3 mit einem bekannten, durch 3 nicht theilbaren Quotienten. Fährt man auf diese Weise fort, die Theilbarkeit durch die der Reihe nach kommenden Primzahlen 5, 7, 11.... 13 zu erproben: so wird die vorgelegte Zahl das Produkt dieser verschiedenen Primzahlen sein, jede auf diejenige Potenz erhoben, deren Grad durch die Anzahl der mit ihr verrichteten Divisionen angezeigt wird. Ist z. B. die gegebene Zahl 360, so dividire durch 2; den Quotienten 180 durch 2; endlich 90 durch 2. Da der dritte Quotient 45 nicht mehr durch 2 theilbar ist, so hat man $360 = 2^3 \times 45$. Dividire nun 45 durch 3; man erhält $45 = 3^2 \times 5$, folglich $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Die Zerlegung ist hier beendigt, weil 5 eine Primzahl ist. Der Rechnung gibt man gewöhnlich die oben angegebene Darstellung, um so die Reihe der Factoren besser zu übersehen.

360	2	210	2
180	2	105	3
90	2	35	5
45	3	7	7
15	3		
5	5		

Man findet ähnlicherweise $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Dies Verfahren führt nach einer bestimmten Anzahl von Versuchen zum Ziel. Ueberdies weiß man, daß die Zerfällung in Grundfactoren nur auf eine Art geschehen kann. — Mittelst der am Schlusse des Buches angegebenen Tafel kann man diese Rechnung etwas erleichtern. Auch gibt diese Methode den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen; denn zerlegt man diese Zahlen in ihre einfachen Factoren, so ist dieser Theiler offenbar das Produkt aus den niedrigsten vorkommenden Potenzen dieser Grundfactoren, welche in den gegebenen Zahlen zugleich als Factoren vorkommen. Sind die gegebenen Zahlen $312 = 2^3 \times 3 \times 13$, und $132 = 2^2 \times 3 \times 11$; so

ist der größte gemeinschaftliche Theiler $= 2^2 \times 3 = 12$, wie in §. 23.

§. 28. Es ereignet sich zuweilen, daß die unternommenen Versuche nicht gelingen; daß nämlich kein Theiler für die vorgelegte Zahl, oder für einen der etwa erhaltenen Quotienten gefunden wird; in solchem Falle ist die Zahl oder der Quotient eine Primzahl; eine Zerfällung derselben in Factoren kann demnach nicht statt finden. Bemerkt kann werden, daß derlei unnöthige Divisions-Versuche nur bis zu der Quadratwurzel der zu theilenden Zahl getrieben zu werden brauchen. Die gegebene Zahl ist in der That das Produkt ihrer Wurzel mit sich selbst; außerdem kann der eine Factor nicht zunehmen, ohne daß der andere abnimmt, insofern ihr Produkt ungeändert bleibt (§. 13). Folglich muß der eine Factor des Dividend kleiner, als dessen Wurzel sein, wenn der andere diese Wurzel übersteigt. Eine Zahl kann daher durch eine ihre Quadratwurzel übertreffende Zahl nicht getheilt werden, wenn sie solches nicht schon durch eine Zahl wurde, die kleiner als diese Quadratwurzel ist. Obgleich man nur Primzahlen der Probe unterwirft, so weiß man (§. 25.), daß andere Zahlen, die nicht Primzahlen sind, für sich keine Theiler abgeben können; z. B. 127 ist weder durch 2, 3, 5, 7, noch durch 11 theilbar, und wird es daher auch nicht durch 4, 6, 8, 9, 10 sein. Da $\sqrt{127}$ zwischen 11 und 12 liegt, so ist sicher 127 eine Primzahl. — 1524 ist theilbar durch 3 und 4; man erhält $1524 = 2^2 \times 3 \times 127$. Man findet darauf, daß 127 weder durch 5, noch durch 7, noch durch 11 theilbar ist. Ohne diese Versuche weiter fortzusetzen, erkennt man 127 als eine Primzahl; die Zerlegung ist demnach beendigt.

§. 29. Wir wollen jetzt sämmtliche Theiler einer gegebenen Zahl suchen. Man löse sie in ihre einfachen Factoren auf; gibt man dann einigen dieser Factoren irgend einen Exponenten, der höchstens demjenigen gleich sein darf, mit dem versehen sie in der vorgelegten Zahl selbst vorkommen: so erhält man einen Theiler dieser Zahl. Alle möglichen Verbindungen dieser Art muß man so vornehmen, um überzeugt zu sein, keinen Theiler weggelassen zu haben. Ein Mittel, keine dieser Verbindungen zu vergessen, ist folgendes: Wir nehmen deßhalb die Gleichung $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; mit 2^3 bilden wir die Reihe $1, 2, 2^2, 2^3$; mit 3^2 die Reihe $1, 3, 3^2$; mit 5 endlich 1, 5. Jedes dieser Glieder ist Theiler von 360; multipliciren wir jede Zahl

der ersten Reihe mit jeder Zahl der zweiten, die verschiedenen Resultate mit den Gliedern der dritten: so erhalten wir offenbar alle nur mögliche Verbindungen. Wir sind so sicher, die sämmtlichen gesuchten Theiler zu erhalten, die hier sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Ebenso für $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ erhält man:
1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.

Für $675 = 3^3 \times 5^2$ findet man aus $(1 + 3 + 9 + 27) \times (1 + 5 + 25)$:

1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675.

§. 30. Da der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen sämmtliche durch die Operation gegebenen Reste theilen muß, so wollen wir nun die verschiedenen Quotienten dieser Divisionen aufsuchen. Es sei das Beispiel 2961 und 799 gegeben. Suchen wir jetzt wie viel mal 47 in jedem dieser Divisoren enthalten ist. Offenbar ist er es nur 1 mal in 47, 2 mal in 94; schreibe 1 unter 47 und 2 unter 94. Man hat $235 = 2 \times 94 + 47$ woraus $\frac{235}{47} = 2 \times \frac{94}{47} + \frac{47}{47} = 2 \times 2 + 1$ oder 5, was man unter 235 schreibt. Diese Zahl wurde gefunden, indem man die zwei unter 94 stehenden Zahlen multiplicirte und zum Produkt 1 addirte, das zur Rechten in der letzten Linie steht. Um den Quotienten 564 durch 47 zu erhalten, hat man ebenso $564 = 2 \times 235 + 94$, woraus $\frac{564}{47} = 2 \times 5 + 2 = 12$, das man unter 564 setzt. Man fahre auf diese Weise fort, die zwei unter 564 geschriebenen Zahlen mit einander zu multipliciren und zum Produkte die rechtsstehende Zahl zu addiren. Hier folgt die Rechnung, von der Zahl 5 angefangen:

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2
63	17	12	5	2	1

$2 \times 2 + 1 = 5$, $2 \times 5 + 2 = 12$, $1 \times 12 + 5 = 17$, $3 \times 17 + 12 = 63$.

Diese Rechnung, welche uns in der Folge von großem Nutzen sein wird, kann hier dazu dienen, zwei Zahlen zusammen zu setzen, deren gemeinschaftlicher Theiler nebst der Anzahl der zu seiner Auffindung erforderlichen Divisionen und den successiven Quotienten gegeben sind. Man schreibe diese Quotienten in eine Linie, es ist dies hier die zweite; leite aus ihr, wie die obige Rechnung angibt, die dritte Linie ab;

nehme dann die zwei größten Resultate derselben und multiplicire solche mit dem vorgelegten gemeinschaftlichen Theiler.

Hier noch zwei andere Beispiele: 115 und 69; ihr gemeinschaftlicher Theiler ist 23, den sie 5 und 3 mal enthalten. — Das zweite Beispiel sei 3085 und 910, welche Zahlen 617 und 182 mal den Theiler 5 enthalten.

115	69	46	23
	1	1	2
5	3	2	1

3085	910	355	200	155	45	20	5
	3	2	1	1	3	2	4
617	182	71	40	31	9	4	1

§. 31. Um den größten gemeinschaftlichen Theiler von vier Zahlen 150, 90, 40 und 200 zu finden, suche man vorerst den von 150 und 90, welcher 30 ist; die verlangte Zahl ist also schon ein Factor von 30, darauf den größten Theiler von 30 und 40, welcher 10 ist, endlich den von 10 und 200, der 10 ist, und dies ist die verlangte Zahl. Die vier gegebenen Zahlen haben also keinen andern gemeinschaftlichen Theiler als 1, 2, 5 und 10. Dasselbe Verfahren ist für jede beliebige Anzahl von Zahlen anwendbar.

§. 32. Es seien mehrere Zahlen, z. B. 2, 3, 4, 6, 8 und 12 gegeben; man suche die möglichst kleinste Zahl, die durch alle diese Zahlen theilbar ist. Weil 2, 3, 4 und 6 eine gewisse Anzahl mal in 8 oder 12 vollständig enthalten sind, so ist einleuchtend, daß jede, durch die zwei letzteren theilbare, Zahl, nothwendigerweise auch durch die andern theilbar ist, welche man daher ganz ausser Betracht lassen kann. Bildet man folglich eine Zahl, die alle Factoren von 8 und 12 enthält, so kann man sicher sein, daß solche durch alle gegebenen Zahlen theilbar ist; enthält sie aber nur die Factoren von 8 und 12, so ist sie die verlangte kleinste Zahl. Um daher die möglichst kleinste Zahl, welche mehrere gegebene Zahlen als Factoren enthält, zu finden, lasse man diejenigen weg, welche in andern schon enthalten sind und berücksichtige nur die übrigen, die man in ihre Grundfactoren zerlegt. Die gesuchte Zahl ist das Produkt aus den höchst vorkommenden Potenzen aller dieser Factoren. Sind die gegebenen Zahlen 2, 3, 5, 10, 15, 8, 24, 12 und 6, so berücksichtigt man blos 10, 15 und 24, oder 2×5, 3×5 und $2^3 \times 3$; der möglichst kleinste Dividend ist folglich $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

Bedingungen für die Theilbarkeit der Zahlen durch 2, 3, 5, 7.

§. 33. Eine Zahl heißt gerade, wenn sie durch 2 theilbar ist. Die durch 2 nicht theilbaren Zahlen heißen ungerade.

Es sei irgend eine Zahl, z. B. 476, gegeben. Man zerlege sie in Zehner und Einer; nämlich: $470 + 6 = 47 \times 10 + 6$. Der erste Theil ist durch 2 theilbar, folglich muß es auch der zweite sein, wenn die vorgelegte Zahl ein Vielfaches von 2 ist. Jede Zahl also, welche sich mit einer geraden Ziffer endigt, ist gerade, oder durch 2 theilbar.

Zerlegt man eine Zahl in zwei Theile, von welchen einer aus den 2, 3, ... letzten Ziffern derselben besteht, so findet man ähnlicherweise, daß die zwei letztern Ziffern ein Vielfaches von 4 sein müssen, wenn die Zahl durch 4 theilbar sein soll, daß die drei letztern Ziffern ein Vielfaches von 8 sein müssen, wenn die Zahl durch 8 theilbar sein soll ꝛc.

Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn sie sich mit 5 oder mit Null endigt. Sie ist durch 10 theilbar, wenn sie es durch 2 und 5 ist, d. h. wenn sie sich mit einer Null endigt. Ebenso lassen sich die Bedingungen für die Theilbarkeit durch 25, 50 ꝛc. auffinden.

§. 34. Eine Zahl, z. B. 27542, läßt sich auf folgende Art ausdrücken: $2 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 + \ldots$. Um den Rest, welchen man bei ihrer Division durch eine andere Zahl, z. B. 7, erhält, zu finden, dividire man 1, 10, $10^2 \ldots$ durch 7. Der Rest von 1 ist 1; der von 10 ist 3; der von 10^2 oder 100 ist das Quadrat von 3 (§. 22.) oder $9 - 7 = 2$; der von 10^3 oder $10^2 \times 10$ ist $2 \times 3 = 6$; der von 10^4 ist $6 \times 3 = 18$, oder $18 - 14 = 4$ ꝛc. Wird also jeder Rest mit 3 multiplicirt und 7 dann, wenn es angeht, weggenommen: so erhält man, bei der Division der Zahlen 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4 und 10^5 durch 7, nach und nach die Reste 1, 3, 2, 6, 4 und 5. Kommt man an 10^6, so ist der Rest $5 \times 3 = 15$ oder vielmehr $15 - 14 = 1$. Hat man einmal den Rest 1 wieder gefunden, so folgt unmittelbar aus der Rechnung selbst, die uns jene auf einander folgenden Reste geliefert hat, daß solche periodisch wieder zum Vorschein kommen; d. h. setzt man diese Division der successiven Potenzen von 10 durch 7 weiter fort, so findet man diese Reste abermals und in derselben Ordnung immer wiederkehrend. Die Zahlen (1, 3, 2, 6, 4, 5), welche stets in derselben Reihenfolge wiederkehren, bilden die sogenannte Periode. Der Rest von 10^{26} ist einerlei mit dem von 10^{20}, von 10^{14}, 10^8, 10^2; er ist 2, und wird gefunden durch die Hinwegnahme der in 26 enthaltenen Vielfachen von 6, da hier die Periode 6 Glieder zählt. Der Rest von 10^{25} ist einerlei mit dem

von 10, das heißt er ist 3. Man könnte das Dasein einer solchen Periode schon voraussagen. Denn, da diese Reste der Divisionen kleiner als der Divisor 7 sind, so kann man höchstens die sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu Resten erhalten, die hier nur in einer andern Ordnung vorkommen. Null kann man zum Reste nicht erhalten, weil die Division nicht aufgeht. Nach sechs Divisionen, im höchsten Falle, muß man einen von den vorhergehenden Resten wieder erhalten; dann kehrt die Periode wieder, weil die Multiplicationen in derselben Ordnung wiederkehren. Geben 10^{18} — 10^{12} einerlei Rest, so ist die Differenz $10^{18} - 10^{12}$ oder $10^{12}(10^6 - 1)$ ein Vielfaches von 7 (§. 16). Da aber 10^{12} keinen Factor mit 7 gemein hat, so muß (§. 25) $10^6 - 1$ durch 7 theilbar sein; d. h. $10^6 : 7$ gibt zum Reste 1, was erstes Glied der Periode ist. Jeder andere Divisor als 7, der gegen 10 eine relative Primzahl ist, führt zu derselben Folgerung. Sind also 10 und irgend eine Zahl Primzahlen unter sich, so bilden die successiven Reste, welche man durch die Division der Reihe 1, 10, 10^2, 10^3.... mit gedachter Zahl erhält, jedesmal eine Periode, deren Anzahl geringer als die der im Divisor enthaltenen Einheiten ist. Die Periode nimmt an dem ersten Reste 1 ihren Anfang.

Anmerkung. Wenn die Anzahl der Glieder der Periode für einen Divisor nicht gerade dieser Divisor weniger eins ist, so ist sie ein aliquoter Theil desselben, d. h. sie ist in demselben so viel mal enthalten, als es eine ganze Anzahl anzeigt. So hat z. B. für den Divisor 13 die Periode nicht 13, sondern nur 6 Glieder; 6 theilt aber 12. Ebenso hat für den Divisor 11 die Periode nur 2 Glieder; 2 ist aber ein Factor von 10. Für den Divisor 37 endlich besteht die Periode nur aus 3 Gliedern; 3 ist aber ein Factor von 36. Man sehe Gauss Disquisitiones arithmeticæ.

1) Es sei 9 der Divisor. Der Rest von 10:9 ist 1. Die Periode besteht daher nur aus der Ziffer 1, d. h. jede Potenz von 10 durch 9 dividirt läßt 1 zum Reste. Man folgert hieraus (§. 22), daß 20, 200.... durch 9 dividirt zum Reste 2 geben; daß 30, 300.... 3 geben, daß 40, 400.... 4 geben ꝛc. Nun kann eine Zahl, wie z. B. 8753 in Einer, Zehner u. s. w., in unserm Beispiele in $8000 + 700 + 50 + 3$ zerlegt werden. Wird durch 9 dividirt, so sind in vorliegendem Falle die Reste $8 + 7 + 5 + 3 = 23$, d. h. der Rest einer Zahl, durch 9 dividirt, ist derselbe wie der ihrer Ziffernsumme, wenn sie durch 9 dividirt wird.

Die Ziffern- oder Quersumme einer Zahl wird erhalten, wenn man die Ziffern dieser Zahl ohne Rücksicht auf deren Stellenwerth addirt. Nichts ist also leichter, als den Rest einer Zahl durch 9 dividirt zu finden. Z. B. von der Zahl 8753 ist dieser Rest einerlei mit dem von 23 oder $2 + 3 = 5$. Ist die Ziffernsumme ein Vielfaches von 9, so ist die Zahl durch 9 theilbar. Haben zwei Zahlen dieselben Ziffern, aber in verschiedener Ordnung, so geben sie, durch 9 dividirt, einerlei Rest. Die Differenz dieser Zahlen ist demnach ein Vielfaches von 9 (§. 16). So ist $74029 - 9742 = 64287 = 9 \times 7143$.

2) Leicht ist darzuthun, daß diese Eigenschaften auch der Zahl 3 angehören.

3) Es sei nun 7 der Divisor. Die Periode ist in diesem Falle 1, 3, 2, 6, 4 und 5. Die Zahl 13527542 werde als Dividend angenommen. Wird er in $2 + 40 + 500 + 7000 + \ldots$ zerlegt, so sind die Reste dieser Zahlen, durch 7 dividirt, bezüglich dieselben, wie die der Periode, nur sind sie 2, 4, 5, 7 .... mal wiederholt worden. Man schreibe darum die Ziffern der Periode in umgekehrter Ordnung unter die aufeinander folgenden Ziffern der vorgelegten Zahl, wie hier nebenbei geschehen, und multiplicire darauf in jeder Abtheilung die untereinanderstehenden Ziffern. Die Summe 105 aller dieser Produkte gibt, durch 7 dividirt, denselben Rest, den die vorgelegte Zahl, durch 7 dividirt, geben wird. Der Rest von 105 ist 0; demnach sind beide Zahlen durch 7 theilbar. — Man darf übrigens auch zu große Quotienten, anstatt zu kleine nehmen; oder mit andern Worten: es ist gleichgültig 10^4 gleich $7 \times 1428 + 4$, oder gleich $7 \times 1429 - 3$ zu setzen.

$$
\begin{array}{r}
13527542 \\
31546231 \\
\hline
1 \times 2 = 2 \\
3 \times 4 = 12 \\
2 \times 5 = 10 \\
6 \times 7 = 42 \text{ etc.} \\
\text{Summe } 105
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
13 \;\; \overline{527} \;\; 542 \\
31 \;\; 231 \;\; 231
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r}
1 \cdot 2 = 2 & 1 \cdot 7 = 7 \\
3 \cdot 4 = 12 & 3 \cdot 2 = 6 \\
2 \cdot 5 = 10 & 2 \cdot 5 = 10 \\
1 \cdot 3 = 3 & \overline{23} \\
3 \cdot 1 = 3 & \\
\overline{30} &
\end{array}
$$

Dieser Bemerkung zufolge kann man also von den Zahlen 1, 3, 2, 6, 4 und 5, welche die Periode ausmachen, die 3 letztern durch ihre Ergänzung zu 7 oder bezüglich durch 1, 3 und 2 ersetzen, welche die abgezogenen Reste der Vielfachen von 7, d. h. die negativen Reste (§. 4) sind. Die Periode ist dergestalt auf die 3 Zahlen 1, 3, und 2 reducirt; nur sind die Produkte theils additiv, theils subtractiv zu nehmen. Man theilt deshalb die Zahl in Klassen von je 3 Ziffern ab; bildet wie vorher die Produkte; addirt sowohl die der ungeraden Klassen als die der geraden, zieht aber die

Summe der geraden Klassen von der Summe der ungeraden ab. Die Rechnung steht dann so wie hier oben, wo der Querstrich über die Factoren gesetzt ist, deren Produkte subtractiv sind. Der Rest, den 13527542, durch 7 dividirt, gibt, ist einerlei mit dem von $30 - 23 = 7$ oder 0.

4) Es sei jetzt 11 der Divisor. Die Periode besteht hier aus 1 und 10, wo es frei steht, $11 - 10$ oder 1 anstatt 10 zu setzen; nur darf nicht vergessen werden, daß das eine Produkt subtractiv, d. h. daß die Periode $+ 1, - 1$ ist. Addirt man also von einer Zahl die Ziffern in den ungeraden, und ebenso auch die Ziffern in den geraden Stellen, und zieht die letztere Summe von der erstern ab: so gibt der Rest den Rest der Zahl, durch 11 dividirt, an. In dem Beispiele 732931 hat man $1 + 9 + 3 = 13$, $3 + 2 + 7 = 12$; $13 - 12 = 1$; der Rest von 732931 durch 11 dividirt ist also 1. Für die Zahl 429180 haben wir $0 + 1 + 2 = 3$, $8 + 9 + 4 = 21$. Da 21 von 3 sich nicht abziehen läßt, so müssen wir zu 3 ein hinreichendes Vielfaches von 11 addiren, z. B. 22; wir erhalten dann: $22 + 3 - 21 = 4$ als den gesuchten Rest. 63613 ist ein Vielfaches von 11, weil $3 + 6 + 6 - 1 - 3 = 15 - 4 = 11$.

Wenn man überlegt, daß $100, 100^2, 100^3 \ldots$, durch 11 dividirt, 1 zum Reste geben, kann man auch, wie folgt, verfahren: Theile die gegebene Zahl, z. B. 9387928, von der Rechten zur Linken in Klassen von je 2 Ziffern ab; in unserm Beispiele also $28 \cdot 1 + 79 \cdot 100 + 38 \cdot 100^2 + 9 \cdot 100^3$; dividire jeden Theil dann durch 11. Der verlangte Rest ist $28 + 79 + 38 + 9$, oder die Summe 154 der Zahlen in diesen Klassen. Also haben 9387928 und 154, beide durch 11 dividirt, einerlei Rest. Wird 154 nach demselben Verfahren behandelt, so hat man 55 oder 11×5 als Rest, oder vielmehr 0; die vorgelegte Zahl ist also ein Vielfaches von 11.

28
79
38
9
154

5) 37 sei nun der Divisor. Da $1000 = 27 \times 37 + 1$, so sind die Reste der Division von $1, 1000, 1000^2 \ldots$ durch 37 sämmtlich 1. Um also den Rest einer gegebenen Zahl, wie 99 | 732 | 458 | 968, durch 37 dividirt, zu erhalten, theilt man die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je 3 Ziffern; der gesuchte Rest ist einerlei mit dem der Summe 2 | 257 der Zahlen in diesen Klassen, oder mit $257 + 2$. Man sieht, daß dieser Dividend ein Vielfaches von 37 ist.

968
458
732
99
2257

6) Um alle Primzahlen von 1 an bis zu einer gegebenen Grenze zu erhalten, schreibe man die ungraden Zahlen von 1 bis zu dieser Grenze in eine Reihe: 1, 3, 5, 7, 9, 11...., lasse dann jede dritte Zahl von 3 an weg, die sämmtlich Vielfache von 3 sind, hierauf jede fünfte Zahl von 5 an als Vielfache von 5 ꝛc., wobei die schon weggelassenen Zahlen immer mitgezählt werden. Die nicht ausgestrichenen Zahlen sind die gesuchten Primzahlen.

Man sehe die am Ende des Buchs angeführte Tabelle.

Anmerkung 1. Zu den so gefundenen Primzahlen ist noch die Primzahl 2 zu zählen.

Anmerkung 2. Es ließen sich für die Theilbarkeit der Zahlen noch andere Regeln angeben. Da ihre Anwendung zu mühsam ist, so wollen wir unterlassen, sie hier anzuführen. Ob eine Zahl durch eine Primzahl, die weder 2, noch 3, noch 5 ist, theilbar sei, untersucht man am füglichsten durch wirkliche Division.

Von der Probe der vier Rechnungsarten.

§. 35. Da man Fehler in einer Rechnung begehen kann, so ist es von Nutzen, sich von der Richtigkeit des Resultats durch eine Operation zu überzeugen; es ist dies die Probe der Rechnung. Damit sie zum gewünschten Ziele führe, sollte sie leichter als die zu prüfende Rechnung zu verrichten sein, um bei ihrem Gebrauche etwaige Fehler eher vermeiden zu können. Wollte man eine Multiplication dadurch prüfen, daß man das Produkt durch einen seiner Factoren dividirte, und dann nachsähe, ob der Quotient der andere Factor sei: so könnte man glauben, eher bei der Division, als bei der Multiplication einen Fehler gemacht haben. — 1) Man prüft die Addition durch die Addition selbst. Man macht nämlich die Operation zweimal, und zwar einmal, indem man von oben herunter, ein andermal, indem man von unten hinauf zählt. Man kann ferner die Addition in mehrere andere zerlegen; auch kann man zu den verschiedenen gegebenen Zahlen andere hinzufügen, die man hernach wieder wegnimmt.

Man kann die Zahlen zusammenzählen, indem man mit der erſten Columne auf der linken Seite den Anfang macht. So hat in nebenstehendem Beispiele die Columne der Tausende zur Summe 6; da man 7 in dieser Stelle vorher fand, so zeigt 7 — 6 oder 1, welches man unter 7 schreibt, an, daß 1 dieser Columne beigefügt wurde, daß folglich die der Hunderte nicht

2758
3099
469
1029
7355
1230

3 sondern 13 gegeben hat. Nun gibt diese Columne nicht 13, sondern 11; 13 — 11 = 2 ist demnach von der Columne der Zehner zurückbehalten worden, welche Columne 25 gibt. Bei der letzten Columne darf kein Rest übrig bleiben.

2) Um die Probe der Subtraction zu machen, addire man den Rest zur abgezogenen Zahl; die Summe muß der größern der gegebenen Zahlen gleich sein.

3) Bei der Multiplication verwechselt man Multiplicand und Multiplicator mit einander (§. 11). Man kann auch die Factoren mit beliebigen Zahlen multipliciren oder dividiren; das Produkt wird dadurch eine bestimmte Aenderung erleiden (§. 13). Leicht ist's, zu untersuchen, ob diese Bedingung erfüllt werde.

4) Multiplicirt man den Quotienten mit dem Divisor, addirt darauf den Rest: so muß man den Dividend zum Resultate erhalten. Für diese Rechnungsart besteht eine andere Probe noch darin, daß man Dividend und Divisor durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt; der Quotient darf dadurch nicht geändert sein (§. 15).

5) Man kann die Richtigkeit der Division und Multiplication auch dadurch prüfen, indem man die beiden Factoren und das Produkt durch irgend eine Zahl dividirt, und darauf untersucht, ob das Produkt der Reste von den Factoren gleich dem Reste des Produktes sei (§. 22). Da die durch die Divisoren 9 und 11 hervorgebrachten Reste leicht zu finden sind (§. 24), so gibt man ihnen gewöhnlich zu diesem Gebrauche den Vorzug. Zur Erläuterung wollen wir ein Beispiel vornehmen. In §. 14 wurde gefunden, daß $53687 \times 908 = 48747796$. Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, addiren wir sämmtliche Ziffern dieser 3 Zahlen, lassen dabei, so oft es angeht, 9 weg; wir finden so die Reste 2, 8 und 7. Nun ist $2 \times 8 = 16$, und 7 der Rest von 16:9; die Rechnung daher richtig, es sei denn, daß Fehler sich gegenseitig aufgehoben hätten u. s. w.

Nehmen wir 11 als Divisor an, so müssen wir bei jeden 3 Zahlen die Summe der geradstelligen Ziffern von der Summe der ungeradstelligen Ziffern abziehen. Man hat hier $18 - 11 = 7$; $17 - 0 = 17$ oder 6; $25 - 27 = -2$ oder 9 (Ergänzung von 2 zu 11). Soll die Multiplication richtig sein, so muß 7×6 oder 42, durch 11 dividirt, 9 zum Reste geben, was hier statt findet. — Dividirt man 700200031 durch 683679, so erhält man (§. 18) 1024 als Quotienten und 112735 als Rest. Man addire nun die Ziffern dieser Zahlen, um die Reste

zu finden, die sie, durch 9 dividirt, geben. Diese Reste sind 4 für den Dividend, 3 für den Divisor, 7 für den Quotienten und 1 für den Rest. Das Produkt 7 × 3 oder 21 zu 1 addirt, gibt 22 oder 4; also muß 4 der Rest bei der Division des Dividend durch 9 sein, was zutrifft. Man setzt diese zwei Proberechnungen an, wie folgt:

Multiplicand 2	16 oder 7	Dividend 4	Divisor 3	21 + 1 oder 4
Multiplicator 8		Rest 1	Quotient 7	
Produkt 7				

Für jede Probe gilt übrigens die Regel: Stimmt die richtig gerechnete Probe mit dem geprüften Resultate, so ist es wahrscheinlich, daß dasselbe richtig sei; stimmt die Probe aber nicht, so ist das Resultat falsch.

Zweites Kapitel.

Eigenschaften und Umwandlung der Brüche.

§. 36. Ein Ding messen, heißt: einen genauen Begriff von seiner Größe geben, indem wir es mit einer andern von derselben Art vergleichen, dessen Größe uns bekannt ist, und das wir als Einheit annehmen. Ist die Einheit vollkommen eine gewisse Anzahl mal in einer Größe enthalten, so heißt diese Zahl das Maß der Größe; ist sie solches nicht, so kann man eine andere Einheit annehmen, die diese Bedingung erfüllt; denn die Größe der Einheit ist ganz willkührlich und unabhängig von dem Dinge, das man messen will. Die Größe eines Dinges kann demnach durch verschiedene Zahlen ausgedrückt werden, je nachdem man diese oder jene Größe zur Einheit wählt.

Um eine vorläufige Kenntniß von mehrern Größen oder Einheiten jeder Art zu erlangen, theilt man die ursprüngliche Einheit in gleiche Theile, dergestalt, daß einer dieser Theile eine genaue Anzahl mal in dem zu messenden Dinge enthalten ist; einen solchen Theil nimmt man nun als Einheit an. Das Maß ist alsdann das, was man einen **Bruch** nennt, d. h. **ein oder mehrere Theile der Einheit**. Sagt man

von einem Dinge, daß es fünf Siebentel der Einheit ist, so muß man sich folgende Vorstellung davon machen. Nachdem die Einheit in sieben gleiche Theile getheilt worden, sind fünf solcher Theile zu nehmen, um ein jenem Dinge gleiches Aggregat zu bilden.

Hieraus folgt, daß jeder Bruch durch zwei Zahlen ausgedrückt werden muß; die erste, der **Nenner** genannt, zeigt an, in wie viel Theile die Einheit getheilt ist, und die zweite, welche **Zähler** heißt, gibt an, wie viel man solcher Theile zu nehmen hat. Fünf Siebentel sind ein Bruch, dessen Zähler fünf und dessen Nenner sieben ist. Man schreibt die Brüche, indem man den Nenner unter den Zähler setzt und beide durch einen Horizontalstrich von einander absondert. Fünf Siebentel werden so durch $\frac{5}{7}$ bezeichnet. Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ heißen eine Hälfte, ein Drittel, ein Viertel. Bei allen andern spricht man die beiden Ziffern aus, indem man die Endsilbe **tel** an den Nenner anhängt: $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$, werden gelesen 5 Achtel, 7 Elftel.

§. 37. Da jedes Siebentel 7 mal genommen die Einheit gibt, so werden $\frac{5}{7}$ mit 7 multiplicirt 5 Einheiten geben, oder $\frac{5}{7} \times 7 = 5$; **folglich bringt jeder Bruch, mit seinem Nenner multiplicirt, den Zähler hervor.**

Hieraus folgt, nach der in §. 5 gegebenen Erklärung, daß $\frac{5}{7}$ der Quotient von 5 dividirt durch 7 ist; d. h. **jeder Bruch ist der Quotient der Division des Zählers durch den Nenner.** Dies ist der Grund, warum der Bruch und die Division auf eine und dieselbe Art geschrieben sind. Der Quotient von 47, dividirt durch 7, ist also $6 + \frac{5}{7}$, weil, nach der Multiplication dieser Größe mit 7, man $42 + 5$ oder 47 erhält. **Wird folglich zu dem ganzen Quotienten, welchen man bei einer Division erhält, ein Bruch hinzugesellt, der den Rest zum Zähler und den Divisor zum Nenner hat: so wird der Quotient vervollständigt sein.** 7231 2146 : 8369 gibt 8640 zum Quotienten und 3986 zum Reste; der vollständige Quotient ist also $8640 + \frac{3986}{8369}$.

Daraus ergeben sich folgende Folgerungen:

1) Sind Zehner und Nenner einander gleich, so ist der Bruch der Einheit gleich, was sich übrigens von selbst versteht: $\frac{11}{11} = \frac{12}{12} = 1$.

2) Ist der Zähler größer als der Nenner, so ist der Bruch größer als die Einheit. Ein solcher Bruch heißt ein uneigentlicher oder unächter Bruch. Jeder Bruch dagegen, dessen Zähler kleiner als der

Nenner ist, heißt ein eigentlicher oder ächter Bruch. Man findet die in einem unächten Bruche enthaltenen Ganzen, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt: $\frac{37}{5}$ oder 37 dividirt durch 5 ist $= 7 + \frac{2}{5}$. Es ist nämlich einleuchtend, daß, im Falle die Einheit in 5 Theile getheilt wird, der vorgelegte Bruch eben so viel Einheiten enthält, als man 5 mal solcher Theile nimmt, oder so viel mal 37 die 5 enthält. Mit dem Nenner muß man dagegen die ganzen Zahlen multipliciren, wenn sie in Brüche umgewandelt werden sollen. Um 7 in Fünftel zu verwandeln, muß man 7 mit 5 multipliciren. Man hat so $7 = \frac{35}{5}$; deßgleichen $8 + \frac{3}{7} = \frac{56}{7} + \frac{3}{7} = \frac{59}{7}$.

Anmerkung. Das Zurückführen eines Ausdruckes, der aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht und den man gemischte Zahl zu nennen pflegt, auf die Form eines unächten Bruches heißt: den Ausdruck einrichten.

3) Eine Zahl durch 2, 7, 9, 11.... dividiren, heißt: von ihr die Hälfte, den Siebentel, den Neuntel.... nehmen.

4) $\frac{5}{7}$ von einer Zahl nehmen, heißt: sie in 7 gleiche Theile theilen und fünf solcher Theile nehmen. Man muß daher diese Zahl durch 7 dividiren und den Quotienten mit 5 multipliciren. Hinsichtlich des Resultats ist es einerlei, welche von diesen beiden Operationen zuerst vorgenommen wird (§. 15, 4°). $\frac{5}{7}$ von 84 sind 5 mal $\frac{84}{7} = 5 \times 12 = 60$, oder $= \frac{5 \times 84}{7}$; $\frac{3}{11}$ von 40 sind gleich $\frac{3 \times 40}{11} = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}$.

§. 38. Ein Bruch wird vergrößert, wenn man seinen Zähler vergrößert, ohne seinen Nenner zu ändern; denn dadurch wird eine größere Anzahl von denselben Theilen der Einheit genommen. Ein Bruch wird verringert, wenn man seinen Nenner vergrößert, ohne seinen Zähler zu ändern; denn die Einheit ist in eine größere Anzahl Theile getheilt, ein jeder derselben ist also kleiner geworden, und doch nimmt man dieselbe Anzahl wie vorher. Man kann also in gewissen Fällen sogleich erkennen, welches der größere von zwei Brüchen ist: $\frac{5}{7} > \frac{4}{7}$, $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$, $\frac{4}{3} > \frac{3}{7}$.

Es ist klar, daß die Verdoppelung der beiden Glieder eines Bruches denselben unverändert läßt; denn, 1) indem man den Nenner 7 des Bruches $\frac{5}{7}$ verdoppelt, wird jeder Theil in zwei Theile getheilt, weil die Einheit anstatt 7 jetzt 14 Theile enthalten wird. Um nun dieselbe Größe

wie vorher zu haben, wird man 2 Theile anstatt einem, 4 anstatt 2..., endlich 10 anstatt 5 nehmen müssen, und $\frac{10}{14}$ wird $\frac{5}{7}$ sein. Wird 7 und 5 verdreifacht, so hätte man ähnlicherweise $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ ꝛc. *Der Werth eines Bruches wird folglich nicht geändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt:* $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{300}{400} = \frac{90}{120}$ ꝛc.

Hieraus ziehen wir mehrere Folgerungen: 1) Um den Brüchen $\frac{5}{7}$ und $\frac{3}{4}$ gleichen Nenner zu verschaffen, multipliciren wir die beiden Glieder 5 und 7 des erstern mit 4, und die beiden Glieder des zweiten mit 7, wir erhalten $\frac{5 \times 4}{7 \times 4}$ und $\frac{3 \times 7}{4 \times 7}$ oder $\frac{20}{28}$ und $\frac{21}{28}$. Es ist klar, daß diese Rechnung, welche den Werth der Brüche ungeändert läßt, ihnen denselben Nenner $4 \times 7 = 7 \times 4$ gibt. *Um also irgend zwei Brüche auf einen und denselben Nenner zu bringen, muß man die beiden Glieder eines jeden Bruches mit dem Nenner des andern multipliciren.* Sehr leicht ist es hiernach, den größern von zwei vorgelegten Brüchen anzugeben, z. B. $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$, weil $\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$. *Will man mehr als zwei Brüche auf gleichen Nenner bringen, so zeigt eine ähnliche Schlußfolge, daß man die beiden Glieder eines jeden mit dem Produkte der Nenner aller andern zu multipliciren habe.* Der gemeinschaftliche Nenner ist das Produkt aller gegebenen Nenner. Es seien die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{3}{4}$ gegeben. Man multiplicire die beiden Glieder $\frac{2}{3}$ mit $4 \times 7 = 28$, die von $\frac{5}{7}$ mit $3 \times 4 = 12$, endlich die von $\frac{3}{4}$ mit $3 \times 7 = 21$; man erhält $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$ und $\frac{63}{84}$; also $\frac{3}{4} > \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$.

Die Zurückführung der Brüche auf einen und denselben Zähler ließe sich eben so leicht bewerkstelligen und könnte ähnlicherweise zur Unterscheidung ihrer Größe dienen.

2) Leicht verwandelt man den Nenner irgend eines Bruches in eine Zahl, die ein gewisses Vielfaches des ursprünglich gegebenen Nenners ist. So kann $\frac{7}{12}$ zum Nenner 60 erhalten; da $60 = 5 \times 12$ ist, so multiplicirt man die beiden Glieder mit 5, und erhält so $\frac{7}{12} = \frac{35}{60}$. Sind die Nenner der gegebenen Brüche nicht Primzahlen unter einander, so kann die Reduction auf einen und denselben Nenner um Vieles einfacher werden. Hat man die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$, so sieht man auf der Stelle, daß durch die Multiplication der beiden Glieder von $\frac{1}{2}$ mit 2 man $\frac{2}{4}$ erhält, der denselben Nenner wie $\frac{3}{4}$ hat. $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$ werden des-

gleichen $\frac{4}{8}$ und $\frac{5}{8}$. Hat man $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{8}$, so multiplicirt man 7 und 12 mit 2, dann 5 und 8 mit 3, und auf diese Weise bekömmt man $\frac{14}{24}$ und $\frac{15}{24}$. Man suche überhaupt die kleinste durch einen jeden der gegebenen Nenner theilbare Zahl, so wird diese als gemeinschaftlicher Nenner benutzt werden können. Es seien z. B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ gegeben. Nachdem 24 als die kleinste durch 2, 3, 4, 6, 8 und 12 theilbare Zahl erkannt ist, dividire man 24 durch diese verschiedenen Zahlen, und man erhält zu Quotienten 12, 8, 6, 4, 3, 2. Multiplicirt man die beiden Glieder jedes Bruches mit dem entsprechenden Quotienten, so hat man: $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{10}{24}$. Die Zurückführung auf einen und denselben Nenner ist so auf die einfachste Weise vor sich gegangen.

Anmerkung. Die möglichst kleinste Zahl, welche die Nenner aller Brüche als Factoren enthält, wird der Hauptnenner oder auch Generalnenner genannt.

3) Jeder Bruch, dessen beide Glieder einen und denselben Factor enthalten, nimmt nach Hinweglassung dieses Factors eine einfachere Form an, und sein Werth wird dadurch nicht geändert. Bringt man einen Bruch dahin, daß seine beiden Glieder keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben, so kann man ihn auf keine einfachere Weise mehr ausdrücken. Denn nähme man an, daß der Bruch $\frac{7}{11}$, in welchem 7 und 11 Primzahlen unter einander sind, auf die einfachere Gestalt $\frac{3}{4}$ gebracht werden könnte: so hätte man, indem man diese Brüche auf einerlei Nenner bringt, $\frac{7\times4}{44} = \frac{3\times11}{44}$, oder $7\times4 = 3\times11$; was ungereimt ist (§. 25, 4°), weil 3×11 durch 7 theilbar sein müßte.

Um also einen Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck zu bringen, muß man alle, den beiden Gliedern gemeinsame, Factoren unterdrücken.

Man zerfälle deßhalb diese Zahlen in ihre einfachen Factoren (§. 27) und lasse nur diejenigen bestehen, die ihnen nicht gemeinschaftlich angehören. Einfacher ist's, den größten gemeinschaftlichen Theiler der beiden Glieder (§. 23) zu suchen, und sie dann durch diesen Theiler zu dividiren. So hat man 47 (§. 23) als größten Theiler von 799 und 2961 gefunden; daher $\frac{17}{63}$ der einfachste Ausdruck von $\frac{799}{2961}$, indem man oben und unten durch 47 dividirt. Um die gesuchten Glieder der Quotientenreihe, die zu dem gemein-

schaftlichen Theiler führt, abzuleiten, haben wir in §. 30 ein leichtes Verfahren angegeben. Hier unten steht die Rechnung für die zwei Brüche $\frac{891}{3429}$ und $\frac{649}{1062}$, die man auf die Form $\frac{33}{127}$ und $\frac{11}{18}$ bringt; ihre größten gemeinschaftlichen Theiler sind nämlich 27 und 59.

3429	891	756	135	81	54	27	1062	649	413	236	177	59
	3	1	5	1	1	2		1	1	1	1	3
127	33	28	5	3	2	1	18	11	7	4	3	1

Ein Bruch kann eine unendliche Anzahl von Formen annehmen und ohne seinen Werth zu ändern, kann man ihn durch sehr verschiedene Zahlen ausdrücken. Leichter ist's aber, sich eine genaue Vorstellung von seiner Größe zu machen, wenn man ihn auf seine einfachste Form gebracht hat.

Anmerkung. Der einfachste Ausdruck heißt auch die kleinste Benennung des Bruches. Das Verfahren, wodurch ein Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht wird, nennt man das Heben des Bruches.

4) Sind zwei Brüche einander gleich, so wird ihnen auch derjenige, noch gleich sein, dessen Zähler gleich der Summe oder Differenz der gegebenen Zähler, und dessen Nenner gleich der Summe oder Differenz der gegebenen Nenner ist. In der That $\frac{14}{22} = \frac{35}{55}$, denn diese Brüche sind gleich $\frac{7}{11}$; die Zähler sind Vielfache von 7, und die Nenner dieselben Vielfachen von 11. Nun ist klar, daß eben so $35 + 14$ ein Vielfaches von 7, und $55 + 22$ dasselbe Vielfache von 11 ist; folglich $\frac{49}{77} = \frac{7}{11}$.

Die Glied für Glied wiederholte Subtraction vereinfacht immer mehr und mehr den zusammengesetzten Bruch, ohne seinen Werth zu ändern. Läßt sich der eine Bruch auf keine einfachere Weise darstellen, so sind die Glieder des andern die Produkte der beiden Glieder des erstern mit einem und demselben Factor.

Addition, Subtraction, Multiplication und Division.

§. 39. Nichts ist leichter, als Brüche zu addiren oder von einander abzuziehen, wenn sie einerlei Nenner haben; man addirt dann Zähler oder zieht sie von einander ab, der Nenner bleibt derselbe. $\frac{7}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12}$ oder $\frac{1}{3}$. — $\frac{7}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{11}{12}$. Sind die Nenner verschieden, so formt man die Brüche vorerst so um, daß sie gleiche

Nenner erhalten (§. 38, 1⁰ und 2⁰); z. B. $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$ oder $\frac{21}{28}+\frac{20}{28}=\frac{41}{28}=1+\frac{13}{28}$. — $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{3}{4}=\frac{56}{84}+\frac{60}{84}+\frac{63}{84}=\frac{179}{84}=2+\frac{11}{84}$. In dem Beispiele $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}$ findet man 120 als Hauptnenner (§. 32); die Zähler sind dann $60+80+72+84+56+100-45-30-50$ oder 327; das gesuchte Resultat ist $\frac{327}{120}$ oder $2+\frac{29}{40}$.

Hat man gemischte Zahlen, so operirt man mit den Ganzen und den Brüchen, mit jedem für sich. Um $3+\frac{1}{2}$ zu $4+\frac{3}{4}$ zu addiren, nehme man $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ oder $1+\frac{1}{4}$, setze $\frac{1}{4}$ an und behalte 1 zurück, addire 1 zu 3 und 4, und die gesuchte Summe ist $=8+\frac{1}{4}$.

$3\frac{1}{2}$
$4\frac{3}{4}$
$8\frac{1}{4}$

Man soll $11+\frac{3}{4}$, $4+\frac{2}{3}$, $2+\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ und $3\frac{1}{2}$ addiren, man erhält $\frac{40}{12}=3\frac{1}{3}$ als Summe der Brüche, 20 als Summe der ganzen Zahlen; folglich die Totalsumme $23\frac{1}{3}$.

11	$\frac{3}{4}$	 9
4	$\frac{2}{3}$	 8
2	$\frac{5}{6}$	 10
0	$\frac{7}{12}$	 7
3	$\frac{1}{2}$	 6
23	$\frac{1}{3}$	 40

Um $1+\frac{1}{4}$ von $3+\frac{1}{2}$ abzuziehen, nehme man $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{2}$ weg und 1 von 3; man erhält zum Reste $2+\frac{1}{4}$. Will man $7+\frac{3}{4}$ von $13+\frac{1}{2}$ subtrahiren, so addire 1 zu $\frac{1}{2}$, weil $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{2}$ sich nicht abziehen läßt, und suche $\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$; man erhält $\frac{3}{4}$. Addire darauf gleichfalls 1 zum Subtrahend (§. 9) und sage $13-8=5$, man erhält zum Reste $5+\frac{3}{4}$.

$3\frac{1}{2}$	2		13	$\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{4}$	1		—7	$\frac{3}{4}$
$2\frac{1}{4}$	1		5	$\frac{3}{4}$

§. 40. $\frac{2}{5}$ mit 3 multipliciren heißt: $\frac{2}{5}$ dreimal zu sich selbst addiren, oder $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$, was sich auf die Multiplication des Zählers 2 mit 3 reducirt: $\frac{2}{5}\times 3=\frac{6}{5}$. Um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, muß man den Zähler mit dieser Zahl multipliciren. Man könnte auch den Nenner durch diese Zahl dividiren, wenn er ein Vielfaches derselben wäre; denn $\frac{3}{4}\times 2$ gibt $\frac{3\times 2}{4}=\frac{3}{2}$, nach Hinweglassung des beiden Gliedern gemeinsamen Factors. Die Operation reducirt sich demnach auf die Division des Nenners durch 2 im vorgelegten Bruche $\frac{3}{4}$. Man findet ähnlicherweise $\frac{11}{18}\times 36=\frac{11}{1}\times 2=22$. — $\frac{19}{24}\times 12=\frac{19}{2}$.

Um umgekehrt einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, muß man den Nenner mit dieser Zahl multipliciren, oder den Zähler durch sie dividiren. Ist nämlich der Zähler ein Vielfaches des Divisors, wie z. B. $\frac{15}{11}:5$, so erhellt von selbst, daß $\frac{3}{11}$ der Quotient ist, weil man den Dividend wieder erhält, wenn man $\frac{3}{11}$ mit dem Divisor 5 multiplicirt. Ist der Zähler aber kein Vielfaches vom Divisor, wie z. B. $\frac{6}{7}:5$, so kann man den Bruch leicht durch 5 theilbar machen, indem man seine beiden Glieder

mit 5 multiplicirt; man erhält $\frac{6 \times 5}{7 \times 5}$. Die Division durch 5 gibt nun $\frac{6}{35}$; die Rechnung reducirt sich also auf die Multiplication des Nenners mit 5.

§. 41. Betrachten wir jetzt die Fälle, wo Multiplicator und Divisor Brüche sind. Es sei das Beispiel $3 \times \frac{2}{5}$ gegeben. Nach der von der Multiplication gegebenen Definition (§. 3) will man also den Multiplicand 3 so viel mal nehmen, als es die Zahl der Einheiten im Multiplicator anzeigt. Da nun dieser letzte Factor nur $\frac{2}{5}$ von der Einheit ausmacht, so ist klar, daß man hier nur $\frac{2}{5}$ von demjenigen nehmen will, was 1 mal 3 geben würde, nämlich $\frac{2}{5}$ von 3. Mit $\frac{2}{5}$ multipliciren, will also nichts anderes sagen, als $\frac{2}{5}$ des Multiplicands nehmen. Wir haben gesehen (§. 37), daß man 2 mit 3 multipliciren und durch 5 dividiren müsse, um $\frac{2}{5}$ von 3 zu nehmen: $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5} = 3 \times \frac{2}{5}$. Um $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{7}$ zu multipliciren, d. h. $\frac{5}{7}$ von $\frac{3}{4}$ nehmen, muß man aus der Größe $\frac{3}{4}$ sieben Theile bilden und 5 solcher Theile nehmen; oder $\frac{3}{4}$ mit 5 multipliciren und das Resultat durch 7 dividiren. Die erste dieser Operationen gibt $\frac{15}{4}$, und die zweite $\frac{15}{28}$. — Hieraus folgt:

1) Um zwei Brüche mit einander zu multipliciren, muß man Glied für Glied multipliciren, d. h. das Produkt der Zähler durch das der Nenner dividiren.

2) Das Produkt ist kleiner als der Multiplicand, sobald der Multiplicator kleiner als die Einheit ist.

3) Man kann die Ordnung der Factoren verwechseln, wie bei der Multiplication mit ganzen Zahlen.

4) Sind gemeinschaftliche Factoren vorhanden, so ist's zweckgemäß, solche vor der Verrichtung der Multiplication wegzulassen. Um z. B. $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{6}$ von $\frac{4}{5}$ von der ursprünglichen Einheit zu nehmen, was man einen Bruchs-Bruch nennt, muß man die Multiplication verrichten von $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$, oder $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 4}{3 \times 4 \times 6 \times 5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, nach Hinweglassung der Factoren 3, 4 und 5.

5) Das Quadrat, der Cubus, im allgemeinen jede Potenz eines Bruches wird dadurch erhalten, daß man seine beiden Glieder zu dieser Potenz erhebt. So ist z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ das Quadrat von $\frac{2}{3}$; der Cubus von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ ꝛc. Folglich ist jede Potenz eines nicht reducirbaren Bruches ebenfalls unreducirbar.

6) Um 5348 mit $\frac{13}{16}$ zu multipliciren, könnte man 5348 mit 13 multipliciren und das Produkt durch 16 dividiren. Da aber der Multiplicand eine ziemlich große Zahl ist, so verfährt man kürzer, wenn man $\frac{13}{16}$ in aliquote Theile, d. h. in Brüche zerlegt, die reducirt 1 zum Zähler erhalten; nämlich: $\frac{13}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$. Man nimmt zuvörderst die Hälfte von 5348; darauf ein Viertel, was die Hälfte des eben gefundenen Resultats ausmacht; endlich den sechszehnten Theil (Viertel des zweiterhaltenen Produktes).

Multipl.	5348
$\frac{1}{2}$	2674
$\frac{1}{4}$	1337
$\frac{1}{16}$	$334\frac{1}{4}$
Produkt	$4345\frac{1}{4}$

Man findet hier neben das Produkt von 356 mit $23\frac{5}{6}$, wo $\frac{5}{6}$ in $\frac{3}{6}$ oder $\frac{1}{2}$, und $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$ zerlegt ist.

	356
	$23\frac{5}{6}$
3 . . .	1068
20 . . .	7120
$\frac{1}{2}$ . . .	178
$\frac{1}{3}$ . . .	$118\frac{2}{3}$
	$8484\frac{2}{3}$

Um $\frac{3}{4}$ durch $\frac{5}{7}$ zu dividiren, multiplicire man die beiden Glieder von $\frac{3}{4}$ mit 5×7; dadurch wird $\frac{3}{4} = \frac{3\times5\times7}{4\times5\times7} = \frac{3\times7}{4\times5} \times \frac{5}{7}$. Um nun durch $\frac{5}{7}$ zu dividiren, ist es hinreichend, den Factor $\frac{5}{7}$ hier wegzulassen; was zum Quotienten gibt $\frac{3\times7}{4\times5}$ oder $\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$. Man muß also den Dividend mit dem umgekehrten dividirenden Bruche multipliciren.

$8 : \frac{3}{5} = 8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$. — $\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{5} = \frac{33}{20}$.

Der Quotient ist übrigens größer als der Dividend, sobald der Divisor kleiner als die Einheit ist.

Die etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Factoren sind wegzulassen, ehe man zur Multiplication schreitet.

$\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$ ist so viel wie $2 : 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. — $\frac{18}{19} : \frac{9}{38} = \frac{2\cdot9}{19} \times \frac{2\cdot19}{9} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = 4$.

§. 42. Hat man gemischte Zahlen, so verwandelt man sie in unächte Brüche (§. 37). — Beispiele:

$$3\tfrac{2}{9} \times 7\tfrac{1}{3} = \tfrac{29}{9} \times \tfrac{22}{3} = \tfrac{638}{27} = 23\tfrac{17}{27}.$$
$$45\tfrac{3}{4} \times 17\tfrac{2}{3} = \tfrac{183}{4} \times \tfrac{53}{3} = \tfrac{9699}{12} = 808\tfrac{1}{4}$$
$$2\tfrac{1}{3} : 4\tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{3} : \tfrac{19}{4} = \tfrac{7}{3} \times \tfrac{4}{19} = \tfrac{28}{57}.$$

Oefter ist es kürzer, die Multiplication einzeln vorzunehmen und dann zu addiren. In dem Beispiele $3\frac{1}{4} \times 8$, multiplicire man mit 8 zuvörderst $\frac{1}{4}$, darauf 3; man erhält $\frac{8}{4}$ oder 2 und 24. Das Produkt ist folglich 26. Das nebenanstehende Beispiel zeigt die Entwicklung der Rech-

	$45\frac{3}{4}$
	$17\frac{2}{3}$
	315
	45
$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ . . .	$\frac{1}{2}$
$45\times\frac{2}{3}$ . . .	30
$17\times\frac{3}{4}$ . . .	$12\frac{3}{4}$
	$808\frac{1}{4}$

nung von $45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3}$. Man multiplizirt 45 mit 17, $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$, 45 mit $\frac{2}{3}$ und 17 mit $\frac{3}{4}$. Die Summe dieser Resultate gibt 808 $\frac{1}{4}$ als gesuchtes Produkt.

Man kürzt zuweilen die Rechnung dadurch ab, daß man den multiplicirenden Bruch in seine aliquoten Theile zerlegt, d. h., wie schon gesagt, in andere Brüche, welche, wenn man sie reducirt, 1 zum Zähler haben, und mit jedem einzeln dann operirt. Um $\frac{11}{12}$ von 756 zu nehmen, setzt man $\frac{11}{12} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$. Für $\frac{6}{12}$ nehme man die Hälfte von 756, welche 378 ist; für $\frac{4}{12}$ das Drittel, welches 252 ist; endlich für $\frac{1}{12}$ das Viertel von 252, das 63 macht. $\frac{11}{12}$ von 756 sind also $= 378 + 252 + 63 = 693$.

Bei der Division kann man den Nenner des Divisors dadurch fortschaffen, daß man die zwei gegebenen Größen durch diesen Nenner multiplicirt, was den Quotienten ungeändert läßt (§. 15.) Um $2\frac{1}{3}$ durch $3\frac{5}{6}$ zu dividiren, multiplicire ich diese zwei Größen durch 6; ich habe so 14 durch 23 zu dividiren, oder $\frac{14}{23}$. Ebenso ist $125\frac{1}{3} : 18\frac{3}{4} = 501\frac{1}{3} : 75 = \frac{501}{75} + \frac{1}{225} = 6 + \frac{154}{225}$. — $1 : 2\frac{1}{3} = 3 : 7 = \frac{3}{7}$.

Von den Decimalbrüchen.

§. 43. Das Unbequeme, welches in den Rechnungen die beiden Glieder der Brüche mit sich bringen, leitete auf die Idee, den Nenner im Voraus zu bestimmen und sich ihn dabei zu denken. Es gibt dies zu zwei besondern Anordnungen Anlaß, zu den Decimalbrüchen und den mehrnamigen oder complexen Zahlen; beide sind den früher angegebenen Regeln unterworfen, die nur einfacher werden. Wir wollen uns zuerst mit den Decimalbrüchen beschäftigen.

Man hat (§. 4) gesehen, daß jede Ziffer einen zehnfach kleineren Werth darstellt, als sie in der Stelle der Ziffern haben würde, der sie zur Linken steht. Setzt man diese Uebereinkunft auch auf der rechten Seite der Einer weiter fort, deren Stelle durch ein Komma angedeutet sein mag: so sieht man, daß die erste Ziffer nach den Einern die Zehntel, die zweite die Hundertel, die dritte die Tausendtel u. s. w. darstellen wird. 3,3 bezeichnet so 3 Ganze und $\frac{3}{10}$. — 42,05 ist so viel wie 42 und $\frac{5}{100}$. — $0,403 = \frac{4}{10} + \frac{3}{1000} = \frac{403}{1000}$.

Hiernach ist die rechts von dem Komma stehende Zahl der Zähler; der Nenner, welcher nicht besonders geschrieben zu werden braucht, ist 1 mit so viel angehängten Nullen, als Ziffern nach dem Komma

folgen. Sehr leicht ist es also, einen geschriebenen Decimalbruch zu lesen, oder umgekehrt, einen ausgesprochenen Decimalbruch zu schreiben. Die Stelle der letzten Decimalziffer bestimmt den Nenner; sie zeigt an, wie viel Nullen der Ziffer 1 zur Rechten beizufügen sind. Z. B. 8,700201 = 8 und 700201 Milliontel, weil 1 in der sechsten Stelle den Nenner 1000000 gibt. Ebenso 354,0063 = 354 + 63 Zehntausendtel. Umgekehrt wird 3 Zehntausendtel geschrieben: 0,0003, weil 4 Nullen in 10000 enthalten sind und die letzte Decimalziffer in der vierten Stelle steht.

1000 Ganze und 4 Hundertel = 1000,04.

13 tausend Hundertmilliontel = 0,00013000.

§. 44. Man bemerke: 1) daß durch Versetzung des Komma's, je nachdem man es eine Stelle weiter rechts oder weiter links rückt, die Zahl mit 10 multiplicirt oder dividirt wird. Ebenso wird sie mit 100 oder 1000.... multiplicirt oder dividirt, wenn man das Komma um zwei oder drei.... Stellen weiter nach der rechten oder linken Seite hinrückt. Denn auf diese Weise haben alle Ziffern einen 10, 100, 1000.... mal größern oder kleinern Werth bekommen. So ist 342,53 = 10 × 34,253.

2) Der Werth eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man auf seiner rechten Seite eine oder mehrere Nullen anhängt oder wegläßt. Die beiden Glieder des Bruches werden so durch 10, 100.... multiplicirt oder dividirt. 0,3 = 0,30 = 0,300 ist eben so viel wie $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$.

3) Zwei Decimalbrüche, welche aus einer gleichen Anzahl Ziffern bestehen, haben einerlei Nenner. Um sie auf einerlei Benennung zu bringen, ist's hinreichend die Zahl der Decimalziffern in ihnen gleich groß zu machen, indem man auf die rechte Seite des einen die erforderliche Anzahl Nullen hinschreibt.

Anmerkung. Die Ziffern hinter dem Komma heißen Decimalziffern, und die Stellen derselben die Decimalstellen. Z. B. In 0,0834 ist 8 die zweite Decimalziffer und steht in der zweiten Decimalstelle.

4) Will man zwei Decimalbrüche rücksichtlich ihres Werthes mit einander vergleichen, so muß man nicht die Zahl der Decimalziffern in Betracht ziehen, sondern die Größe derselben von dem Komma an gerechnet. $0{,}4 < 0{,}51$. — $0{,}7 > 0{,}54321$, weil $7 > 5$. — $0{,}004 > 0{,}00078$. — $0{,}09 < 0{,}1$. — $0{,}687 > 0{,}6839$.

§. 45. Wir wollen nun sehen, was aus den Regeln der Addition, Subtraction.... bei Decimalbrüchen sich ergibt. Um Decimalbrüche zu addiren oder zu subtrahiren, ergänze man die fehlenden Decimalstellen in den einzelnen Decimalbrüchen durch Nullen (§. 44.), so daß alle Decimalbrüche eine gleiche Anzahl von Decimalstellen bekommen, rechne dann wie gewöhnlich, als wäre kein Komma da und setze das Komma darauf in die Summe genau unter die Kommata der zu addirenden Zahlen. Es ist nicht nöthig, die Nullen wirklich anzuhängen; es ist hierbei bloß zu beobachten, daß jede Ziffer die ihr in Bezug auf das Komma gebührende Stelle erhalte.

Einige Subtractions-Beispiele:

57,02	4,8274	6,00435	3,842
48,1	2,0139	0,17	1,004554
8,92	2,8135	5,83435	2,837446

§. 46. Um die zwei Größen 43,7 und 3,91 mit einander zu multipliciren, bemerke man, daß sie gleichgeltend mit $\frac{437}{10}$ und $\frac{391}{100}$ sind. Das Produkt der Zähler muß durch das der Nenner dividirt werden (§. 41), also $\frac{437 \times 391}{1000} = \frac{170867}{1000} = 170,867$. Um folglich das Produkt von zwei Decimalbrüchen zu erhalten, multiplicire man sie ohne Rücksicht auf das Komma, und sondere so viel Decimalziffern auf der rechten Seite des Produktes ab, als in beiden Factoren zusammengenommen vorkommen.

Hier einige Multiplications-Beispiele:

2,4542	3,7	21,32	0,04
0,0053	4,12	0,100103	0,007
73626	74	6396	0,00028
122710	37	2132	
0,01300726	148	2132	
	15,244	2,13419596	

Man könnte die Multiplication auch dadurch verrichten, daß man mit der Ziffer der höchsten Ordnung den Anfang machte. Jedes Partialprodukt müßte dann eine Stelle weiter nach der Rechten gerückt werden; die erste Linie würde dann diejenige sein, welche sonst zuletzt geschrieben wird, die sonst vorletzte würde die zweite sein 2c. In der nebenstehenden Rechnung

	934525
	34276
3...	2803575
4...	3738100
2...	1869050
7...	6541675
6...	5607150
	32031778900

sieht man dies ausgeführt. Man hat hierbei den Vortheil, daß man sogleich die Ziffern von dem höchsten Werth und der höchsten Ordnung findet, was zuweilen hinreichend ist. In unserm Beispiele hat das erste Produkt 7 Ziffern; die vier andern Partialmultiplicatoren fordern, daß man die Produkte um vier Stellen weiter rückt; es sind also im Ganzen 7 + 4 Ziffern im Produkte enthalten. Der Zahl 28, welche zu Anfang der ersten Linie steht, folgen also noch 9 Ziffern (§. 14).

Man kann hiernach jede Multiplication an irgend einer beliebigen Stelle aufhören lassen, folglich im Produkte so viel Ziffern, als man für nöthig erachtet, erhalten. Um z. B. das Produkt von 15,73432 × 322,1179 zu bilden, versetze ich die Kommata dergestalt, daß in einer der beiden Zahlen nur eine ganzzahlige Ziffer vorkomme. Das Produkt wird demnach = 1573,432 × 3,221179, weil ich das Komma in einer Zahl um eben so viel Stellen nach der Rechten, als in der andern nach der Linken fortgerückt habe. Ich verrichte zuvörderst die Multiplication mit dem Ganzen 3; die Stelle des Komma's bleibt offenbar dieselbe wie im Multiplicand. Wir nehmen an, daß im Produkt vier Decimalstellen verlangt wurden. Ich multiplicire mit den zwei Zehnern, und rücke dabei um eine Stelle nach der Rechten, was mir 314,6864 gibt. Die Multiplication mit den 2 Hunderteln braucht nur in der zweiten Ziffer 3 des Multiplicands anzufangen, in welchem man die letzte Ziffer 2 zur Rechten ausser Acht läßt, weshalb sie mit einem Punkte bezeichnet ward. Wollte man nämlich das Totalprodukt beibehalten, so müßte man es noch um eine Stelle weiter rechts rücken,

1573,432	
3,221179	
4720,296	...3
314,6864	...2
31,4686	...2
1,5734	...1
1573	...1
1101	...7
141	...9
5068,3059	

und das Produkt 4 befände sich in der fünften Decimalcolumne, dürfte hernach also vernachläßigt werden. Der Faktor 1 der Tausendtel fordert die Weglassung einer zweiten Ziffer in dem Multiplicand, die Ziffer 3 wird daher nicht berücksichtigt, und der Multiplicand ist 15734. Für die folgende Ziffer 1 ist der Multiplicand 1573. Der Factor 7 gibt 1101; der Factor 9 gibt 141.

Größerer Genauigkeit halber ist es passend, dem Produkte der ersten Ziffer die Zehner, welche etwa bei dem Produkte der zur Rechten vernachläßigten Ziffer zurückbehalten wurden, hinzuzufügen. Z. B. für den Factor 7 reducirt sich der Multiplicand auf 157; zu 7 × 7 muß

man aber 2, von dem weggelassenen Produkte von 7 mit 3 herrührend, hinzu addiren. Ebenso ist 9×15 um 6 gewachsen, welche Ziffer von dem Produkte 9×7 zurückbehalten wurde. In unserm Beispiele ist 5068,306 das verlangte Produkt, wie man sich überzeugen kann, indem man die Multiplication ganz ausführt und in dem Resultate nur bis zu den Tausendteln geht.

Hier unten steht ein anderes Beispiel, in welchem zwei Zahlen mit 7 Decimalstellen mit einander multiplicirt sind, und wo verlangt wird, in dem Produkte nur 7 Decimalstellen beizubehalten.

17,3243527						
3,5428319						
51,9730581	Produkt	mit	3			
8,6621764	„	„	5	vermehrt	um	4
6929741	„	„	4	„	„	1
346487	„	„	2	„	„	1
138594	„	„	8	„	„	2
5197	„	„	3	„	„	1
173	„	„	1	„	„	0
156	„	„	9	„	„	3
61,3772693	Produkt	61,377269.				

Diese Regel ist vorzugsweise von Nutzen, wenn die Factoren nur annähernd richtig sind. Denn das allgemeine Verfahren hat den Nachtheil, die Rechnung über die Gebühr auszudehnen, und dem Produkte mehr Ziffern zu geben, als gerade nöthig sind, wenn in einem solchen höchstens nur die Decimaltheile von derselben Ordnung, wie die der beiden Factoren, beizubehalten verlangt werden. Die letzte Decimalstelle, welche man durch diese Vorschrift erhält, kann wegen dem aus den vernachläßigten Columnen herrührenden Zurückbehaltenen etwas unrichtig ausfallen. Man vermeidet diesen Uebelstand, indem man im Produkte eine Decimalstelle mehr berechnet, als verlangt wurde, und die man hernach wegläßt.

§. 47. Um zwei Zahlen, welche Decimalziffern enthalten, durch einander zu dividiren, hänge man derjenigen von beiden, welche die wenigsten Decimalziffern hat, die erforderliche Anzahl von Nullen an, damit sie gleich viel Decimalstellen haben, und lasse sodann das Komma weg. Der Quotient bleibt ungeändert, weil Dividend und Divisor

durch dieselbe Potenz von 10 multiplicirt wurde (§. 15). Ist z. B. 8,447 durch 3,22 zu dividiren, so schreibe man 3,220 und dividire dann 8447 durch 3220. Der Quotient ist 2 und der Rest 2007.

Also $\frac{8,447}{3,22} = 2 + \frac{2007}{3220}$. Ebenso:

$$\frac{49,1}{20,074} = \frac{49,100}{20,074} = \frac{49100}{20074} = 2 + \frac{8952}{20074}.$$

Diese Regel wird einfacher, wenn der Divisor keine Brüche enthält; man kann dann die Ganzen für sich dividiren. Z. B. $\frac{6,9345}{3} = 2,3115$. Sind in dem Dividend mehr Decimalziffern, als in dem Divisor enthalten, so kommt man auf diesen Fall zurück, wenn man das Komma auf beiden Seiten um so viel Stellen versetzt, daß der Divisor eine ganze Zahl wird.

$$8,447 : 0,09 = 844,7 : 9 = 93,8 + \frac{5}{90}.$$

Anmerkung. Die Division erfährt eine ähnliche Abkürzung, wie die Multiplication. Hat man z. B. 320,31768 durch 93,4525 zu dividiren, und will man nur 4 Decimalstellen haben: so suche man nach der gewöhnlichen Methode die 2 ersten Ziffern 3,4 und lasse die letzte Ziffer im Divisor weg. Man erhält dadurch 2 zum Partialquotienten, hat dann 93452 mit 2 zu multipliciren und von 257918 abzuziehen; es bleibt 71013.

```
3203176,8 | 934525
 399601 8 | 3,4276
  25791 8
   7101 3
    559 7
```

Man lasse wiederum eine Ziffer im Divisor weg, man hat 7 zum Quotienten und 5597 zum Reste ꝛc. Bei jeder Ziffervernachläßigung trage man Sorge, die Zehner, welche aus dem Produkte dieser vernachläßigten Ziffer mit der gefundenen Ziffer des Quotienten etwa erhalten werden, dem darauf folgenden Produkte beizufügen. Uebrigens sind die letzten Ziffern des Quotienten unrichtig. Es erklärt sich dieses Alles sehr leicht.

Von den Annäherungen und Perioden bei Decimalbrüchen.

§. 48. Der Fehler, welchen man bei der Vernachläßigung der letzten Stelle eines Decimalbruches begeht, wird desto kleiner, je mehr Ziffern derselbe hat. Nimmt man z. B. 0,4 für 0,43, so beträgt der

Fehler 3 Hundertel; er macht nur 3 Tausendtel, wenn man 0,04 anstatt 0,043 setzt. Indem man mit 2 oder 3 Decimalstellen sich begnügt und die übrigen vernachläßigt, nimmt man an, daß die dadurch entstandenen Fehler zu gering sind, um Berücksichtigung zu verdienen. Selten wendet man mehr als 6 oder 7 Decimalstellen an. — Das Resultat einer Rechnung sei 4,837123. Man kann 4,8, oder 4,83, oder 4,837 .... als Werth dieser Größe annehmen. Da sie $>4{,}8$ und $<4{,}9$ ist, so sieht man, daß diese beiden Ausdrücke näherungsweise mehr als bis auf $\frac{1}{10}$ richtig sind; der eine gibt etwas zu wenig, der andere etwas zu viel. Ebenso sind 4,83 und 4,84 wenigstens bis auf $\frac{1}{100}$ richtig. Man wird dem Werth 4,84 den Vorzug geben, da wegen der nächstfolgenden Ziffer 7 er mehr, als 4,83 der vorgelegten Größe nahe liegt. Ueberhaupt soll man das letzte beibehaltene Decimalzeichen um 1 vermehren, wenn die erste der unterdrückten Ziffern 5 oder eine höhere Ziffer ist.

§. 49. Es ereignet sich öfters, daß das Resultat einer Rechnung ein nicht reducirbarer, unbequemer Bruch ist. Man begnügt sich alsdann mit einem Näherungswerthe, dessen Grad von der Natur der Aufgabe abhängt.

Nehmen wir an, daß man anstatt $\frac{427}{681}$ einen andern einfacheren Bruch suche, der von ihm um weniger als um $\frac{1}{8}$ verschieden sei: so ist klar, daß, im Falle man zwei Brüche, wie z. B. $\frac{5}{8}$ und $\frac{6}{8}$ fände, deren Nenner 8 beträgt und die 1 zum Unterschied ihrer Zähler haben, beide der verlangten Bedingung genügen werden, wenn $\frac{427}{681}$ zwischen ihnen enthalten wäre. Es handelt sich also darum, diese Zähler 5 und 6 zu finden. Multipliciren wir deßhalb diese drei Brüche mit 8; die beiden gesuchten reduciren sich dann auf ihre unbekannten Zähler, deren Differenz 1 macht; der vorgelegte Bruch aber wird $8\times\frac{427}{681}$ oder $\frac{3416}{681}$ sein, und noch zwischen diesen Zählern liegen. Zieht man aus ihm die Ganzen, so findet man, daß $\frac{3416}{681}$ zwischen 5 und 6 enthalten ist, welches demnach die verlangten Zähler sind. In der That findet man leicht, daß $\frac{5}{8}$ von $\frac{427}{681}$ nur um $\frac{11}{5448}$ verschieden ist, was viel weniger als $\frac{1}{8}$ macht. Hieraus die Regel: *Man multiplicire den vorgelegten Bruch mit dem gegebenen Nenner, so ist die genäherte ganze Zahl des Produktes (um zu viel oder um zu wenig) der verlangte Zähler.* Um einen genäherten Werth von $\frac{34}{57}$ wenigstens bis auf $\frac{1}{11}$ genau zu erhalten, multiplicire man mit 11; man hat $\frac{374}{57}=6$ oder 7 als genäherte ganze Zahl. $\frac{6}{11}$ und $\frac{7}{11}$ sind folglich die gesuchten Brüche. Um einen Werth von $\frac{34}{7}$, der näherungsweise

bis auf $\frac{1}{7}$ richtig ist, zu erhalten, hat man $\frac{34}{7} = 4\frac{6}{7}$. Nun liegt $\frac{6}{7}$ um weniger als $\frac{1}{7}$ zwischen $\frac{6}{7}$ und 1; $4\frac{6}{7}$ und 5 sind folglich die verlangten Zahlen.

Wir wollen jetzt diese Regel auf die Decimalbrüche anwenden. Die Aufgabe sei, einen bis auf $\frac{1}{10}$ richtigen Werth von $\frac{4}{7}$ zu finden. Wir multipliciren $\frac{4}{7}$ mit 10 und erhalten $\frac{40}{7}$, was zwischen 5 und 6 liegt; folglich sind 0,5 und 0,6 die verlangten Brüche. Wollen wir einen bis auf 0,01 richtigen Näherungsausdruck haben, so multipliciren wir mit 100; wir erhalten $\frac{400}{7}$, was zwischen 57 und 58 liegt; folglich sind 0,57 und 0,58 von $\frac{4}{7}$ um weniger als 0,01 verschieden. Ueberhaupt: Dividire den Zähler durch den Nenner, und füge bei jeder Division dem Reste eine Null hinzu, bis man im Quotienten eine Ziffer von der Ordnung der verlangten Annäherung erlangt hat.

$\frac{25}{7}$, dieser Näherungsmethode unterworfen, gibt 3,5, oder 3,57, oder 3,571, oder 3,5714, ... je nachdem man den Werth bis auf $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$... richtig haben will. — $\frac{147475}{362}$ gibt ebenso 407,389...., nachdem man vorerst den ganzzahligen Quotienten 407 gefunden hat, und dann die Division mit Hülfe der den successiven Resten angehängten Nullen fortsetzt.

§. 50. Wenn nach Hinzufügung der erforderlichen Anzahl von Nullen die Division den Rest Null herbeiführt, so ist der Bruch genau in Decimaltheilen ausgedrückt. Man hat genau $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{13}{20} = 0{,}65$. Es ist leicht vorauszusehen, in welchen Fällen dies eintreffen wird. Ist nämlich der Bruch nicht reducirbar, so kann die in Rede stehende Division nur dann ohne Rest endigen, wenn eine von den Zahlen 10, 100, 1000...., mit welchen man den Zähler multiplicirt hat, durch den Nenner theilbar ist (§. 25.), was voraussetzt, daß er weiter keine Primfactoren als 2 und 5 habe, und daß der höchste Exponent von 2 und 5 derselbe, wie der der gebrauchten Potenz von 10 sei. Damit also ein nicht reducirbarer Bruch genau in Decimaltheilen sich angeben lasse, ist's nothwendig und hinreichend, daß der Nenner nur Potenzen von 2 und 5 als Factoren enthalte, der Zähler mag übrigens sein, welcher er will. Die Zahl der Decimalstellen ist gleich dem Grad der höchsten Potenz von 2 und 5. Ist dieser Nenner $2^3 \times 5^2$ oder 200, so ist 3 die Zahl der Decimalstellen. Z. B. $\frac{147}{200} = 0{,}735$.

§. 51. In jedem andern Falle kann ein Bruch nur näherungsweise in Decimaltheilen angegeben werden. Da die Reste der successiven Partialdivisionen nothwendigerweise kleiner als der Divisor sind, und die Zahl dieser Reste unbegrenzt ist: so wird man einen von denselben wieder finden müssen. Man hat dann zum zweiten mal den nämlichen Partialdividend, der einen Quotienten und einen Rest gibt, welche man schon früher erhalten hat u. s. w. Im Quotienten kehren demnach dieselben Ziffern in derselben Ordnung periodisch wieder. Da nun diese Periode herbeigeführt wird, sobald man den nämlichen Rest wieder erhält, und diese Reste kleiner als der Nenner sind: so ist die Zahl der verschiedenen Reste höchstens der Divisor weniger 1. Die Periode besteht also aus weniger Ziffern, als der Nenner Einheiten enthält. Wir werden in der Folge die Periode dadurch anzeigen, daß wir sie zwischen zwei Klammern setzen.

Beispiele: $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}[6]$. $\frac{3}{11} = 0{,}2727\ldots = 0[27]$. $\frac{8}{111} = 0{,}[342]$. $\frac{4}{7} = 0{,}[571428]$. $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots = 0{,}8[3]$. $\frac{7}{12} = 0{,}58[3]$. Die Periode besteht bald aus 1, bald aus 2, aus 3... Ziffern; hier beginnt sie schon mit der ersten Decimalstelle, dort weichen die ersten Decimalstellen von ihr ab.

Anmerkung. Fängt bei einem periodischen Decimalbruche die Periode gleich hinter dem Komma an, so heißt er auch ein vollständig periodischer, wenn sie später ihren Anfang hat, ein unvollständig periodischer.

§. 52. Hat der Nenner weder 2 noch 5 zu Factoren, so beginnt die Periode mit der ersten Decimalziffer. Denn nehmen wir an, daß, bei der Verwandlung von $\frac{3}{7}$ in einen Decimalbruch, die Reste 5 und 2, welche zu Dividenden 50 und 20 geben, zu zwei gleichen Resten führen: so wäre die Differenz 50 — 20 durch 7 theilbar (§. 16), was unmöglich ist, weil die Reste 5 und 2 kleiner als 7 sind, und 7 weder 5 noch 2 zu Factoren hat. Zwei ungleiche Reste 5 und 2 können daher nicht einerlei Reste lassen; erhält man nun zwei gleiche Reste, so waren auch die vorhergehenden Reste gleich; dergestalt kehrt man bis zum ersten Reste 3 zurück.

Hat der Nenner Potenzen von 2 und von 5 nebst andern Zahlen zu Factoren, so gehen der Periode so viel Ziffern vorher als Einheiten in dem höchsten Exponenten von 2 und von 5 enthalten sind. Es sei deshalb

der Bruch $\frac{83}{140}$ gegeben. Da $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, so erhält man, wenn mit 100 multiplicirt wird, $100 \times \frac{83}{140} = \frac{5 \times 83}{7} = \frac{415}{7} = 59\frac{2}{7} = 59,[285714]$. Diese Periode beginnt mit der ersten Decimalziffer. Wird der letzte Ausdruck nun mit 100 dividirt, so ist $\frac{83}{140} = 0,59[285714]$; dem periodischen Theile gehen zwei Decimalziffern vorher.

Wir wollen annehmen, daß ein Bruch, z. B. $\frac{5}{7} = 0,[714285]$, die größtmögliche Anzahl von Ziffern in seiner Periode habe, d. h. eben so viel, als Einheiten weniger 1 in seinem Nenner enthalten sind. Man mußte bei den successiven Divisionen zu Resten die Zahlen 1, 2, 3.... bis 6, wenn auch in einer andern Ordnung, erhalten. Wollte man jetzt $\frac{3}{7}$ in einen Decimalbruch umformen, so ist's unnöthig, die Rechnung von vornen wieder anzufangen; es reicht hin, sie an derjenigen Stelle, wo man den Rest 3 erhalten hat, wieder aufzunehmen, und die Periode mit derjenigen Ziffer anfangen zu lassen, die man bei $\frac{30}{7}$ gefunden hat und die hier 4 ist. So hat man auf der Stelle $\frac{3}{7} = 0,[428571]$. Man sieht, daß man nur ans Ende die beiden ersten Ziffern 71 der ersten Periode gebracht hat. Man hat $\frac{1}{19} = 0,[052631578947368421]$; für $\frac{12}{19}$ bringt man die 3 ersten Ziffern 052 ans Ende, und erhält [631....21052]. Es ergibt sich dies sehr leicht aus der Rechnung selbst, indem man für $\frac{12}{19}$ die ersten Decimalziffern 63.... findet. Man kann auf dieselbe Weise verfahren, wenn der vorgelegte Bruch weniger Decimalziffern haben sollte, als Einheiten weniger 1 in seinem Nenner enthalten sind, in so fern der Zähler des zweiten Bruches einer von den gefundenen Resten des ersten ist. So hat man $\frac{1}{27} = 0,[037]$; für $\frac{10}{27}$ erhält man 0,[370]; für $\frac{19}{27}$ dagegen 0,[703]; weil 10 der erste und 19 der zweite Rest bei der Division von 1 durch 27 ist. Für $\frac{2}{27}$ reicht es hin, die Quotienten und die Reste zu verdoppeln; also $\frac{2}{27} = 0,[074]$; $\frac{20}{27} = 0,[740]$; $\frac{38}{27}$ oder vielmehr $\frac{11}{27} = 0,[407]$. Desgleichen $\frac{5}{27} = [0,185]$; $\frac{23}{27} = [0,851]$; $\frac{14}{27} = = [0,518]$.

Anmerkung. Man kann bemerken, daß, im Falle der Divisor eine Primzahl ist, und die Periode nicht so viel Ziffern hat, als diese Zahl Einheiten weniger 1 enthält, die Anzahl der Ziffern der Periode wenigstens ein Factor (aliquoter Theil) dieser Differenz ist. Z. B. $\frac{1}{13}$ hat nur 6 Ziffern in der Periode; 6 ist aber ein Factor von 13 — 1.

Hier stehen nun verschiedene Decimalbrüche, deren gleichgeltende gewöhnlichen Brüche 1 zum Zähler haben. Man hat an jede Ziffer

der Periode den Rest angesetzt, welcher sie hervorbringt, um dadurch im Stande zu sein, die Periode abzuleiten, falls der Zähler nicht 1 ist.

$\frac{1}{3} = 0,[3]$. $\frac{1}{7} = 0,[1\,4\,2\,8\,5\,7]$. $\frac{1}{11} = 0,[0\,9]$.
Reste 1   1 3 2 6 4 5   1 10

$\frac{1}{13} = 0,[0\,7\,6\,9\,2\,3]$. $\frac{1}{37} = 0,[0\,2\,7]$. $\frac{1}{41} = 0,[0\,2\,4\,3\,9]$.
Reste 1 10 9 12 3 4   1 10 26   1 10 18 16 37

$\frac{1}{17} = 0,[0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7]$.
Reste 1 10 15 14 4 6 9 5 16 7 2 3 13 11 8 12

Wir wollen nun einen Bruch, dessen Zähler 1 sei, in einen Decimalbruch verwandeln und annehmen, daß man einen Rest gleich dem Nenner weniger 1 finde. $\frac{1}{13}$ z. B. gibt, nach drei Divisionen, zum Quotienten 0,076 und zum Reste 12. Um die Operation fortzusetzen muß man $\frac{12}{13}$ oder $\frac{13-1}{13} = 1 - \frac{1}{13}$ in Decimaltheilen angeben; folglich von 1 den schon zum Quotienten erhaltenen Theil 0,076 abziehen, d. h. die Complemente zu 9 dieser sämmtlichen Ziffern nehmen, was 923 gibt. Dergestalt ist $\frac{1}{13} = 0,[076923]$. Die Periode ist nun vervollständigt; denn 10^3 dividirt durch 13 gab 12 zum Reste, die Summe von $10^3 + 1$ muß 13 oder vielmehr 0 zum Reste geben, also $\frac{10^3+1}{13}$ = einer ganzen Zahl. Wird sie mit $10^3 - 1$ multiplicirt, so ist das Produkt $\frac{10^6-1}{13}$ = einer ganzen Zahl, d. h. $\frac{10^6}{13}$ gibt den Rest 1; die Periode hat folglich 6 Ziffern.

Das eben Gesagte findet stets seine Anwendung in dem Falle, wo die Periode so viel Ziffern hat, als Einheiten weniger 1 im Nenner vorkommen. Denn sicher findet man alle Reste 1, 2, 3.... (wenn auch in einer verschiedenen Ordnung), folglich auch den Nenner weniger 1. Die Zahl der die Periode gebenden Divisionen wird dann auf die Hälfte reducirt. So geben, in dem Beispiele $\frac{1}{19}$, neun Divisionen den Quotienten 0,052631578 und den Rest 18. Man nimmt daher die Complemente zu 9, reiht dem gefundenen Quotienten die Zahl 947368421 an, und erhält dergestalt $\frac{1}{19} = 0,[052631578947368421]$. Für $\frac{1}{73}$ erhält man 0,0136 und den Rest 72; folglich $\frac{1}{73} = 0,[01369863]$.

Folgendes Verfahren erlaubt uns, den mittelst einiger anfänglichen Divisionen erhaltenen Decimaltheil auf schnelle Weise weiter fortzusetzen. Für $\frac{1}{19}$ findet man 0,05263 mit dem Reste 3. Es bleibt nun $\frac{3}{19}$ oder $3 \times \frac{1}{19}$ zu entwickeln übrig. Man multiplicirt daher mit 3 den erhaltenen Quotienten, und reiht ihm dann unmittelbar dieses Produkt an,

nämlich 15789. Der Rest ist 9, man multiplicirt nun mit 9 den Totalquotienten oder vielmehr mit 3 das vorhergehende Produkt u. s. w. Man gibt der Rechnung die folgende Darstellung:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{19} = 0{,}05263 \\ \qquad\qquad 15789 \\ \qquad\qquad\qquad 47367 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 142101 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4263 \ldots \\ \hline \frac{1}{19} = 0{,}[052631578947368421]. \end{array}$$

Jedes Produkt mit 3 gibt dem Resultate 5 Decimalstellen; hat das Produkt 6 Ziffern, so wird die sechste zu den Einheiten des vorhergehenden Produktes addirt. Man findet desgleichen:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{71} = 0{,}0140845 \text{ mit dem Reste } 5, \\ \text{Produkt mit } 5 \ldots\ 0704225 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 3521125 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 17605625 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 88028125 \\ \hline \frac{1}{71} = 0{,}01408450704225352112676056338028125 \end{array}$$

§. 53. Es ist leicht, aus einem Decimalbruche den gewöhnlichen Bruch wieder zu finden, aus dem er entstanden ist:

1) Ist der Decimalbruch geschlossen, wie z. B. 0,75, so schreibt man ihn unter die Form $\frac{75}{100}$, den man auf die einfachste Benennung $\frac{3}{4}$ zu bringen hat (§. 38).

2) Ist der Decimalbruch nicht geschlossen, und kennt man die Periode nicht ganz, so läßt die Aufgabe eine unendliche Anzahl von Auflösungen zu. So z. B. entsprechen 0,75; 0,756; 0,755; 0,7512 2c. den Brüchen $\frac{3}{4}$, $\frac{189}{250}$, $\frac{151}{200}$ 2c., welche, in Decimalbrüche verwandelt, 0,75 als erste Decimalziffern haben.

3) Ist die Periode bekannt und beginnt sie mit der ersten Decimalziffer, so bemerke man, daß $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$...., in Decimalbrüche verwandelt, 0,[1], 0,[01], 0,[001]...., geben. Man kann nun z. B. 0,[27] als das Produkt von 0,[01] oder $\frac{1}{99}$ mit 27 ansehen; also 0,[27] $= \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$. Ebenso ist 0,[6] das Produkt von 0,[1] oder $\frac{1}{9}$ mit 6; folglich 0,[6] $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. *Der gewöhnliche Bruch, aus welchem ein periodischer Decimalbruch entstanden ist, wird folglich gefunden, wenn man seine Periode mit derjenigen Zahl dividirt, welche mit so viel 9 geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat.*

Man findet so $0,[342] = \frac{342}{999} = \frac{38}{111}$. $0,[571428] = \frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}$. $0,[036] = \frac{36}{999} = \frac{4}{111}$.

4) Fängt die Periode nicht gleich hinter dem Komma an, so setzt man dasselbe vor die erste Ziffer der Periode, sucht dann den gewöhnlichen Bruch, der dem nunmehrigen periodischen Decimalbruche gleichgeltend ist; addirt ferner diesen Bruch zu den Ganzen, wodurch man eine gemischte Zahl erhält, welche noch durch eine Potenz von 10 zu dividiren ist, deren Grad durch die Anzahl der nicht zu der Periode gehörigen Ziffern angedeutet wird. Für 0,53333.... multiplicire ich mit 10, ich erhalte $5,333.... = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$; dividire nun durch 10, ich bekomme $0,5333.... = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$. Für 0,88[513] nehme ich $88,[513] = 88\frac{19}{37} = \frac{3275}{37}$; dividire dann durch 100, und finde $0,88[513] = \frac{3275}{3700} = \frac{131}{148}$.

Von den benannten und mehrnamigen Zahlen.

§. 54. Die in den bisherigen Rechnungen vorkommenden Zahlen waren unbenannte oder abstracte Zahlen, d. h. die Art ihrer Einheiten war nicht angegeben. Diese Zahlen können jedoch erst dann die Größe eines wirklichen Gegenstandes ausdrücken, wenn die Art ihrer Einheiten bekannt ist. Durch die Zahl 24 deutet man wohl an, daß die zu messende Größe aus 24 mal der Einheit gebildet ist. Sagt man aber z. B., daß der Tag aus 24 Stunden bestehe, so drückt man damit aus: 1) daß die Einheit der Zeit die Dauer einer Stunde ist; 2) daß 24 solcher Einheiten eben so lang wie ein Tag dauern. Zahlen derlei Art, welche aus einer so oftmaligen Zusammenfügung einer besondern Einheit zusammengesetzt sind, als es eine abstracte Zahl angibt, heißen benannte oder concrete Zahlen. Sie sind wirkliche Produkte, deren Multiplicand die Einheit, und deren Multiplicator eine abstracte Zahl ist. Der Ausdruck 24 Gulden ist so viel als 24 mal ein Gulden.

Wir müssen vor allen Dingen die Benennungen kennen lehren, welche gebraucht werden, um die verschiedenen Einheiten zu bezeichnen.

Neues französisches Maß-System.

1) Die Längeneinheit heißt Meter; er ist der zehnmillionste Theil eines Quadranten des durch Paris gehenden Meridians.

2) Ein Quadrat, dessen Seite 10 Meter beträgt, ist die Flächeneinheit und heißt Are.

3) Ein Cubus, dessen Seite der zehnte Theil des Meters macht, ist die Einheit für den körperlichen Raum und heißt Liter. Der Cubikmeter oder Stère dient zur Ausmessung des Brennholzes.

4) Das Gewicht eines Wasserwürfels, dessen Seite $\frac{1}{100}$ Meter, ist die Gewichtseinheit und heißt Gramme. Da das Gewicht eines Rauminhaltes mit seiner Dichtigkeit wächst, so nimmt man destillirtes Wasser, im Zustande seiner größten Dichtigkeit, die bei einer Temperatur von beinahe 4 Grad der hunderttheiligen Scale statt findet.

5) Die geprägten Gold- und Silbermünzen sollen $\frac{1}{10}$ Zusatz enthalten, d. h. $\frac{9}{10}$ des Gewichtes soll der Gehalt an reinem Metall betragen. Die Einheit des Geldes ist der Frank, eine Silbermünze, die 5 Gramme wiegt.

Diese Einheiten sind aber für die mancherlei Anwendungen bald zu groß, bald zu klein. Wollte man nämlich die Entfernung zweier Städte und die Dicke eines Buches in Meter ausdrücken, so erhielte man einerseits eine zu große Zahl, anderseits einen zu beschwerlichen Bruch. Man vereinigte deßhalb mehrere Einheiten einer Art in eine einzige, um beträchtliche Größen zu messen, theilte ferner die Einheiten in passende Unterabtheilungen zur Messung kleinerer Größen. Die Länge von zehn Meter bildet den Dekameter; der Rauminhalt von 10 Liter den Dekaliter; das Gewicht von 10 Gramme das Dekagramm rc. Die Länge von 100 Meter ist ein Hektameter; der Inhalt von 100 Liter ein Hektoliter; 100 Gramme machen ein Hektogramm; 100 Are einen Hektar. 1000 Meter machen einen Kilometer; 1000 Liter einen Kiloliter; 1000 Gramme einen Kilogramm. 10000 Meter sind gleich einem Myriameter.

Jede dieser neuen Einheiten ist zehnmal größer als ihre nächst vorhergehende.

Man theilt ferner den Meter, den Liter.... in zehn Theile; und nennt Decimeter den zehnten Theil des Meters; Deciliter den zehnten Theil des Liters; Decime den zehnten Theil des Franks. Jede dieser Unterabtheilungen wird abermals in zehn Theile getheilt; der Centimeter ist gleich 0,01 Meter; der Centime = 0,01 Frank....; der Millimeter = 0,001 Meter.

Wenn man diese Decimalabtheilung zum Grunde legt, wird man sämmtliche Maßeinheiten mittelst der sechs Benennungen der Haupteinheiten auf leichte Weise ausdrücken. Um nämlich das Zehn-Hundert-Tausendfache dieser Einheiten zu bezeichnen, setzt man ihren Benen-

nungen die aus dem Griechischen herkommenden Wörter Deka (10), Hekto (100), Kilo (1000), Myria (10000), vor. Um dagegen $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.... jener Maßeinheiten zu bezeichnen, setzt man ihren Benennungen die lateinischen Wörter deci (Zehntel), centi (Hundertel), milli (Tausendtel) vor. So z. B. ist ein Kilogramm = 1000 Gramme, ein Centimeter = 0,01 Meter rc. Desgleichen 3827,5 Gramme = 3 Kilogramme, 8 Hektogramme, 2 Dekagramme, 7 Gramme, 5 Decigramme, oder wenn man will 38,275 Hektogramme oder 3,875 Kilogramme. Man drückt dergleichen Größen nach der gewöhnlichen Art der Decimalbrüche aus; man liest demnach die zweite Größe wie folgt: 38 Hektogramme und $\frac{275}{1000}$. Die in dieser Auseinandersetzung angegebenen Arten von Einheiten werden nicht alle gebraucht, man beschränkt sich deshalb nur auf diejenigen, die nöthig sind. Einfach und groß war der Gedanke, der dieses System ins Leben rief; eine unveränderliche, aus der Natur unmittelbar entnommene Größe, der Meter, dient ihm zur Basis, von ihm hängen alle übrigen Maße ab; leicht würde man sie alle wieder auffinden, im Falle eine fürchterliche Katastrophe sie vernichten sollte. Das schönste Lob, welches man dem *neuen* Maßsysteme ertheilen kann, ist die Auseinandersetzung des alten Maßsystems. Wir geben hier die zu Paris im Gebrauch gewesenen Maße, solche änderten sich mit den Provinzen, sogar mit den *Städten*.

Die Einheitslänge heißt Toise; sie wurde in 6 Fuß (0,3248394 Meter) getheilt, jeder Fuß in 12 Zoll, jeder Zoll in 12 Linien. Die Gewichtseinheit war das Pfund (livre), es war in 16 Unzen (onces), jede Unze in 8 Quentchen (gros), jeder Gros in 72 Gran (grains) oder 3 Scrupel (scrupules) getheilt. Das Pfund wurde überdieß noch in zwei Mark getheilt, jede zu 8 Unzen. 1 Kilogramm = 2,0428765 livres. Die Münzlivre enthält 20 Sous, jeder Sous 12 Deniers.

Die Gewichtseinheit für die Diamanten war der Karat, ein Gewicht von 3,876 Grains oder 2 Decigramme; er wurde in 4 Grains getheilt.

Der Tag wird in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden getheilt.

Zur Messung der Zeuge bedient man sich der Elle (aune), einer Länge von ohngefähr 44 Zoll (43,9028 Zoll). — Körpermaße waren der Boisseau (655,78 Cubikzoll); der Litron = $\frac{1}{16}$ Boisseau; der Septier = 12 Boisseaux; der Muid = 12 Septiers. Die Pinte (46,95 Cubikzoll); die Velte = 8 Pintes; der Tonneau = 2 Muids; der Muid = 288 Pintes.

§. 55. Kurze Angabe der verschiedenen in mehreren Staaten Deutschlands und einigen andern Ländern vorkommenden Maß-Systeme.

I. Oestreichische Maße.

Längenmaße: 1 Klafter = 6 Fuß; 1 Fuß = 12 oder 10 Zoll; 1 Zoll = 12 oder 10 Linien; die Elle = 2,465 Fuß; 1 Meile = 4000 Klafter, 1 Fuß = 0,316102 Meter.

Flächenmaße: 1 Joch = 1600 Quadratklafter.

Getraidemaße: Die Muth = 30 Metzen; 1 Metze = 1,9471 Cubikfuß.

Getränkemaße: Der Eimer = 1,792 Cubikfuß; 1 Faß = 10 Eimer; 1 Fuder = 32 Eimer; der Eimer = 40 Maß; 1 Maß = 2 halben; 1 halbe = 2 Seiteln; 1 Seitel = 2 Pfiffen.

Gewichte: 1 Centner = 100 ℔; 1 ℔ = 2 Mark = 32 Loth; 1 Loth = 4 Quentchen; 1 Quentchen = 60 Gran. 1 ℔ = 560,18207 Gramme. 5 Wiener Mark = 6 Kölnische Mark.

Münzen: Durch den Münzfuß eines Landes wird bestimmt, wie viel Stücke von der Hauptmünze desselben eine kölnische Mark fein Silber enthalten. Die Hauptmünze ist der Gulden zu 60 Kreuzer à 4 Pfenning. Der Münzfuß ist der Konventions- oder 20 Guldenfuß, nach welchem 20 fl. oder $13\frac{1}{3}$ Thaler auf die Mark fein gerechnet werden. Man hat noch den 24 Guldenfuß, nach welchem 24 Gulden auf die Mark fein kommen.

II. Preußische Maße.

Längenmaße: Der preußische oder rheinländische Fuß das Grundmaß. 1 Ruthe = 12 Fuß; 1 Fuß = 12 Zoll; 1 Zoll = 12 Linien; 1 Elle = $2\frac{1}{8}$ Fuß; 1 Meile = 2000 Ruthen; 1 Fuß = 0,3138535 Meter.

Flächenmaße: 1 Morgen = 180 Quadrat-Ruthen; 1 Hufe = 30 Morgen.

Getraidemaße: 1 Scheffel = 3072 Cubikzoll = 16 Metzen; 1 Winspel = 24 Scheffeln.

Getränkemaße: Das Quart = 64 Cubikzoll; 1 Anker = 30 Quart; 1 Eimer = 2 Anker; 1 Oxhoft = 3 Eimer. Als Biermaße dienen: 1 Oehmchen = 25 Quart; 1 Tonne = 4 Oehmchen; 1 Faß = 2 Tonnen; 1 Kufe = 2 Faß; 1 Gebräude = 9 Kufen.

Gewichte: 1 Centner = 110 ℔; 1 ℔ = 32 Loth; 1 Loth = 4 Quentchen; 1 Quentchen = $4\frac{1}{2}$ Grän; die Größe des Pfundes ist dadurch bestimmt, daß der Cubikfuß destillirtes Wasser = 66 Pfund wiegt. 1 Pfund = 467,711 Gramme = 2 kölnische Mark.

Münzen: Die eigenthümliche Silbermünze ist der Thaler zu 30 Silbergroschen à 12 Pfenning; 14 Thaler enthalten 1 Mark fein Silber.

III. Sächsische Maße:

Längenmaße: 1 Elle = 2 Fuß; 1 Ruthe = 16 Fuß; 1 Fuß = 12 Zoll = 0,28326 Meter.
Flächenmaße: 1 Acker = 300 □ Ruthen.
Getraidemaße: 1 Winspel = 2 Malter; 1 Malter = 12 Scheffel; 1 Scheffel = 16 Metzen, 1 Scheffel = 103,90 Liter.
Getränkemaße: 1 Fuder = 24 Faß; 1 Faß = 5 Eimer; 1 Eimer = 60 Kannen; 1 Kanne = 2 Nössel; 1 Kanne = 1,204 Liter.
Gewichte: 1 Centner = 110 ℔ = 5 Stein. 1 ℔ = 466,72 Gramme.
Münzen: Der 20 Guldenfuß ist gültig. Man rechnet nach Thalern zu 24 Groschen à 12 Pfenning.

IV. Hanöverische Maße.

Längenmaße: 1 Fuß = 12 Zoll = 0,29199 Meter. 1 Ruthe = 16 Fuß. 1 Elle = 2 Fuß.
Flächenmaße: 1 Morgen = 120 Quadrat-Ruthen.
Getränkemaße: 1 Quartier = 0,9719 Liter; 1 Kanne = 2 Quartier; 1 Anker = 20 Kannen; 1 Ohm = 4 Anker.
Getraidemaße: 1 Last = 16 Malter; 1 Malter = 6 Himten; 1 Malter = 1,866 Hektoliter.
Gewichte: 1 Pfund = 0,48961 Kilogramme.
Münzen: Man rechnet nach Thalern zu 24 Groschen à 12 Pfenning, der Münzfuß ist der 20 Guldenfuß.

V. Baierische Maße.

Längenmaße: 1 Fuß = 0,291859 Meter; 1 Elle = 2 Fuß 10¼ Zoll.
Flächenmaße: 1 Morgen = 40000 Quadratfuß.
Getraidemaße: 1 Scheffel = 6 Metzen; 1 Metze = 4 Viertel; 1 Scheffel = 222,358 Liter.
Getränkemaße: 1 Ohm = 2 Eimer; 1 Eimer = 64 Kannen oder Maß; 1 Maß = 1,069 Liter.
Gewichte: 1 Pfund = 560 Gramme.

VI. Würtembergische Maße.

Längenmaße: 1 Elle = 2,144 Fuß; 1 Ruthe = 10 Fuß; 1 Fuß = 0,28649 Meter.

Flächenmaße: 1 Morgen = 384 Quadrat-Ruthen.
Getraidemaße: 1 Scheffel = 8 Simri; 1 Simri = 4 Vierling; 1 Vierling = 2 Achtel; 1 Simri = 22,1524 Liter.
Getränkemaße: 1 Fuder = 6 Eimer; 1 Eimer = 16 Imi; 1 Imi = 10 Maß; 1 Maß = 4 Schoppen; 1 Maß = 1,83704 Liter.
Gewichte: 1 Pfund = 467,586 Gramme.

VII. Badische Maße.

Längenmaße: 1 Elle = 2 Fuß; 1 Ruthe = 10 Fuß; 1 Fuß = 0,3 Meter.
Flächenmaße: 1 Morgen = 400 Quadrat-Ruthen.
Getraidemaße: 1 Zuber = 10 Malter; 1 Malter = 10 Sester; 1 Sester = 10 Meslein, 1 Sester = 15 Liter.
Getränkemaße: 1 Fuder = 10 Ohm; 1 Ohm = 10 Stützen; 1 Stütze = 10 Maß; 1 Maß = 10 Glas; 1 Maß = 1,5 Liter.
Gewichte: 1 Pfund = 500 Gramme. 100 ℔ = 1 Centner.

VIII. Hessische Maße.

Längenmaße: 1 Elle = 2 Fuß = 24 Zoll; 1 Fuß = $\frac{1}{4}$ Meter = 0,25 Meter; 1 Klafter = 10 Fuß.
Flächenmaße: 1 Morgen = 400 Quadrat-Klafter.
Getraidemaße: 1 Malter = 4 Simmer; 1 Simmer = 4 Kumpf; 1 Kumpf = 4 Gescheid; 1 Gescheid = 4 Mäßchen; 1 Mäßchen = 32 Cubikzoll.
Getränkemaße: 1 Ohm = 4 Viertel; 1 Viertel = 20 Maß; 1 Maß = 4 Schoppen; 1 Schoppen = 32 Cubikzoll = $\frac{1}{2}$ Liter.
Gewichte: 1 Pfund = 500 Gramme.
Münzen: In den letzt 4 genannten Ländern wird nach Gulden zu 60 Kreuzer gerechnet.

Nach dem Vertrag mehrerer süddeutschen Staaten vom 25ten August 1837 gehen 24$\frac{1}{2}$ Gulden auf die Mark fein.

IX. Englische Maße.

Längenmaße: 1 Fuß = $\frac{1}{3}$ Yard; 1 Fuß = 12 Zoll; 1 Ruthe = 16$\frac{1}{2}$ Fuß; 1 Meile = 1760 Yards; 1 Fuß = 0,3048 Meter.
Flächenmaße: 1 Morgen = 160 Quadrat-Ruthen.
Hohlmaße: Die Einheit derselben ist die Gallone. 8 Gallonen = 1 Buschel; 8 Buschel = 1 Quarter; 1 Gallone = 277,274 Cubikzoll.
Gewichte: 1 Pfund Troy-Gewicht = 12 Unzen; 1 Unze = 480 Gräns; 1 Pfund Handelsgewicht = 16 Unzen; die Unze = 16 Drach-

men. 144 Pfund Handelsgewicht = 175 Troy-Pfund. Der Centner = 112 Pfund Handelsgewicht (avoir du poids). Das Gewicht dadurch bestimmt, daß ein englischer Cubikzoll = 252,458 Troy-Grän wiegt.

Münzen: Die eigentliche Münze ist der Schilling Sterling, von dem 44,69 auf die Mark fein gehen. 1 Livre Sterling = 20 Schilling Sterling; 1 Schilling Sterling = 12 Pences.

X. Schweiz.

Längenmaße: 1 Elle = 2 Fuß; 1 Stab = 4 Fuß; 1 Ruthe = 10 Fuß; 1 Fuß = 10 Zoll = 3 Decimeter; 1 Zoll = 10 Linien.

Flächenmaße: 1 Acker Juchart = 40000 Quadratfuß oder 400 Quadrat-Ruthen.

Getraidemaße: 1 Malter = 10 Viertel; 1 Viertel = 10 Jmi; 1 Viertel = 15 Liter.

Getränkemaße: 1 Saum = 100 Maß, 1 Maß = 4 Schoppen, 1 Maß = 1,5 Liter.

Gewichte: 1 Centner = 100 Pfund; 1 Pfund = 32 Loth = 500 Gramme.

Münzen: 1 Schweizerfranken = 10 Batzen; 1 Batzen = 10 Rappen. Auf eine Mark fein gehen 35$\frac{1}{7}$ Franken.

XI. Rußland.

Längenmaße: 1 Fuß = 0,304537 Meter. 1 Sasche = 7 Fuß.

Flächenmaße: 3200 Quadrat-Saschen = 1 Desätine.

Getraidemaße: 1 Tschetwert = 194,55 Liter, 1 Tschetwert = 2 Osmin; 1 Osmin = 2 Pajok; 1 Pajok = 16 Garnetz.

Getränkemaße: 1 Kruschka = 1,5869 Liter. 1 Tschetwerka = 2 Kruschki. 1 Vedro = 4 Tschetwerki.

Gewichte: 1 Pud = 40 Pfund, 1 Pfund = 32 Loth; 1 Pfund = 408,99 Gramme.

Münze: Die Landmünze ist der Rubel zu 100 Kopeken. 13,006 gehen auf 1 Mark fein Silber.

XII. Holland.

Längenmaße: Die Elle ist die Einheit = 1 Meter. 1 Elle = 10 Palm. 10 Ellen = 1 Ruthe.

Flächenmaße: 100 Quadrat-Ruthen = 1 Bunder.

Getraidemaße: 1 Last = 30 Mudden; 1 Mudde = 10 Schepel; 1 Mudde = 1 Hektoliter.

Getränkemaße: 1 Vat = 100 Kannen, 1 Kanne = 1 Liter.
Gewichte: 1 Pond = 1 Kilogramm; 1 Pond = 10 Unzen.
Münzen: Der Gulden ist die Einheitsmünze zu 100 Cents. $24\frac{13}{40}$ fl. gehen auf die Mark fein.

Genauere und umfassendere Angaben über die in verschiedenen Ländern vorkommenden Maße, Gewichte und Münzen findet man in folgenden Werken: 1) Nelkenbrechers Taschenbuch der Münz-, Maß- und Gewichtskunde; 2) Maß- und Gewichtsbuch von Chelius, neue Auflage, von Hauschild; 3) in Ungers Handbuch der Arithmetik II. Theil; 4) Lauteschlägers Maß-, Gewicht- und Münz-Tabellen.

§. 56. Es bleibt uns jetzt noch von den Mitteln zu reden übrig, die vier Rechnungsarten mit mehrnamigen oder complexen Zahlen zu verrichten. Man versteht darunter diejenigen Zahlen, welche aus den Haupteinheiten und ihren Unterabtheilungen gebildet sind. Was die zehntheiligen Maße und ihre Unterabtheilungen anlangt, so haben wir dabei nichts zu erinnern, da die Rechnungen mit ihnen nach den Regeln sich ausführen lassen, die wir in den §§. 45, 46 und 47 aufgestellt haben.

Anmerkung. Zahlen, welche auf eine einzige Einheit bezogen werden, heißen einnamige oder incomplexe Zahlen.

Um mehrnamige Zahlen zu addiren oder von einander abzuziehen, schreibt man die Theile von gleicher Benennung unter einander, verrichtet sodann die Rechnung mit jedem einzelnen Theile, in der niedrigsten Unterabtheilung den Anfang machend. Uebertrifft die Summe einer Columne die Zahl der Einheiten, welche zur Bildung einer oder mehrerer Einheiten der nächst höhern Abtheilung nöthig sind, so behält man solche zurück und setzt blos den Rest an.

Beispiele der Addition:

Toisen.	Fuß.	Zoll.	Linien.	Mark.	Unzen.	Quentchen.	Gran.
154	3	7	$9\frac{1}{2}$	15	3	6	42
23	2	8	$11\frac{1}{3}$	217	7	7	60
132	5	10	$3\frac{5}{6}$	41	6	5	17
0	2	7	1	4	5	6	10
311	2	10	$1\frac{2}{3}$	280	0	1	57

Livres.	Sous.	Deniers.
322	17	5
43	11	7
7	8	4
18	2	7
43	16	6
435	16	5

Tage.	Stunden.	Minuten.	Sekunden.
2	10	42	54
5	9	17	19
0	21	3	48
8	17	4	1

In dem ersten Beispiele gibt die Columne der Linien 25⅐ Linien, oder 2 Zoll 1⅐ Linien, weil 12 Linien 1 Zoll ausmachen. Man schreibt nun diese 1⅐ Linien hin, und fügt die 2 Zoll zu der Columne der Zolle hinzu, was 34 oder 2 Fuß 10 Zoll gibt. Hiervon setzt man 10 hin und hält die 2 zurück ꝛc.

Einige Subtractions-Beispiele:

Pfund.	Unzen.	Quentchen.	Gran.
32	9	2	44
12	12	5	12
19	12	5	32

Toisen.	Fuß.	Zoll.	Linien.
487	0	0	0
319	4	3	10
167	1	8	2

Livres.	Sous.	Deniers.
349	17	4
127	8	7
222	8	9

Tage.	Stunden.	Minuten.	Secunden.
17	11	47	5
13	18	55	40
3	16	51	25

Nachdem man 12 Gran von 44 abgezogen hat, geht man zu den Quentchen über. Da 5 von 2 sich nicht abziehen läßt, addirt man eine Unze oder 8 Quentchen hinzu, und erhält 10 — 5 = 5. Man addirt nun gleichfalls 1 Unze zu den 12 Unzen, die von 9 abgezogen werden sollen; sagt demnach 9 — 13 geht nicht, addirt 1 Pfund oder 16 Unzen hinzu, und erhält 25 — 13 = 12 ꝛc. Diese Operation beruht auf denselben Gründen wie die der ganzen Zahlen. Descartes, geboren den 3. April 1596, starb den 11. Februar 1650. Pascal, geboren den 19. Juni 1623, starb den 19. August 1662. Newton, geboren den 15. December 1642, starb den 18. März 1727. Wie alt wurden diese großen Mathematiker?

§. 57. Was die Multiplication mehrnamiger Zahlen anlangt, so nimmt man die Operation einzeln mit den Ganzen und den Brüchen, nach den (§. 42) gegebenen Regeln, vor. Man überlege dabei, daß der Multiplicator jederzeit eine abstracte Zahl (§. 54) sein muß, welche

anzugeben hat, wie viel mal man den Multiplicand nehmen soll. 12 Gulden mit 3 Ellen multipliciren, kann nicht heißen 12 Gulden 3 Ellen mal nehmen, sondern 12 Gulden so viel mal, als 1 Elle in 3 Ellen enthalten ist, d. h. 3 mal nehmen. Erscheinen dennoch beide Factoren als concrete oder benannte Zahlen, so ist die Aufgabe nicht gehörig auseinandergesetzt. Uebrigens wird dieses in der Folge klar werden.

Es bieten sich zwei Fälle dar, je nachdem der Multiplicator eine complexe oder incomplexe Zahl ist.

Erster Fall. Es wird nach dem Preiße von $17\frac{2}{3}$ Ellen eines Zeuges gefragt, wenn die Elle 45 Livres 12 Sous 6 Deniers kostet. Es ist klar, daß man hier die letzte Zahl $17\frac{2}{3}$ mal zu nehmen hat; der Multiplicator $17\frac{2}{3}$ hört auf, Ellen darzustellen und wird eine abstracte Zahl. Man multiplicirt zuvörderst 45 Livres, dann 12 Sous, endlich 6 Deniers mit 17. Wir zerlegen nun 12 Sous in 10 + 2. Da 1 Livre, 17 mal genommen, 17 Livres gibt, so wird $\frac{1}{2}$ Livre oder 10 Sous die Hälfte von 17 Livres geben. 2 Sous liefern den zehnten Theil davon, oder den fünften Theil des Produktes, was die 10 Sous gegeben haben. Für die 6 Deniers hat man den vierten Theil des bei den 2 Sous gefundenen Produktes zu nehmen. Man nimmt darauf zwei Drittel von dem Multiplicand und addirt sämmtliche Produkte. Die Rechnung geschieht so auf folgende Art:

45 Livres 12 Sous 6 Deniers.
$17\frac{2}{3}$.

315 L.			} 17 mal 45 L.
450			
8...	10 S.......		für 10 Sous, die Hälfte von 17 Livres.
1...	14		für 2 Sous, 1 Fünftel von 8 Livres 10 Sous.
0...	8...	6 D.	für 6 Den., $\frac{1}{4}$ von dem gefundenen Produkte der 2 S.
15...	4...	2...	für $\frac{1}{3}$, das Drittel des Multiplicands.
15...	4...	2...	für $\frac{1}{3}$.
860 Liv.	0 S.	10 Deniers.	

Bei dieser Art von Rechnungen kömmt es hauptsächlich darauf an, jeden Bruch in seine aliquoten Theile, wie in §. 42, zu zerlegen.

So wird 19 Sous oder $\frac{19}{20}$ Livres zerlegt in $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, und $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Hiernach müßte man für 19 Sous $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ des ganzen Multiplicators, als Livres angesehen, nehmen. Man könnte dafür auch $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ und 2 mal $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ nehmen. Für $\frac{7}{8}$ nimmt man ähnlicherweise $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ und $\frac{1}{8}$.

Um Unterabtheilungen also zu multipliciren, bringe man sie auf Brüche höherer Benennung, zerlege den Zähler derselben in Theile, welche den Nenner ohne Rest dividiren. Die fraglichen Brüche werden sonach auf andere reducirt, deren Zähler 1 ist. Z. B. für 10 Zoll oder $\frac{10}{12}$ Fuß zerlegt man 10 in $6 + 2 + 2$, was nach der Reduction macht $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$; oder in $4 + 4 + 2$, was $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ gibt; oder auch in $6 + 3 + 1$, was $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{12}$ macht; ꝛc.

Ist der Multiplicator einziffrig, so ist's einfacher, wie bei der Addition zu verfahren. In dem nebenstehenden Beispiele sagt man nämlich: 7×18 Gran $= 126$ Gr. $= 1$ Quentchen 54 Gr. Man setzt 54 hin und behält 1 zurück; bildet das Produkt von 4 Quentchen mit 7 und hat $4 \times 7 + 1 = 29$ Quentchen, oder 3 Unzen 5 Quentchen; schreibt 5 Quentchen hin und hält 3 Unzen zurück, ꝛc. Um 14 Sous mit 483 zu multipliciren, muß man $\frac{14}{20}$ oder $\frac{7}{10}$ von 483 Livres nehmen; man erhält $\frac{3381}{10} = 338{,}1$, oder 338 Livres 2 Sous.

57 Pf.	5 Unz.	4 Quent.	18 Gr.
7			
401	6	5	54

Zweiter Fall. Die Mark sei 51 Livres 15 Sous 5 Deniers werth; wir wollen den Preis von 36 Mark 6 Unzen 4 Quentchen suchen. Man multiplicirt zuvörderst 51 Livres 15 Sous 5 Deniers mit 36, alsdann nimmt man diese complexe Zahl noch so viel mal, als 6 Unzen 4 Quentchen in der Mark enthalten sind. Der Multiplicator ist eine abstracte Zahl und hört auf, Mark darzustellen. Man multiplicirt also anfänglich 51 Livres 15 Sous 5 Deniers nur mit 36, wie es hier neben an, nach der oben angegebenen Regel, geschehen ist. Es bleibt dann noch übrig, mit dem Bruche 6 Unzen 4 Quentchen zu multipliciren, was geschieht, indem man für 4 Unzen die Hälfte des ganzen Multiplicands 51 Livres 15 Sous 5 Deniers nimmt, weil 4 Unzen mit $\frac{1}{2}$ oder der Hälfte einer Mark gleichgeltend sind. Für 2 Unzen nimmt man die Hälfte dieses Produktes und so fort.

	51 Livres	15 Sous	5 Deniers.
	36 Mark	6 Unzen	4 Quentchen.
	306 Livres.		
	153		
Für 14 S...	25	4 S.	
1 S...	1	16	
4 D...	0	12	
1 D...	0	3	
4 U....	25	17	$8\frac{1}{2}$ D.
2 U....	12	18	$10\frac{1}{4}$
4 Q...	3	4	$8\frac{9}{16}$
	1905	16	$3\frac{5}{16}$

Es ereignet sich öfters, daß man zur Erleichterung der Rechnung ein falsches Produkt bildet. Wenn man z. B. 14 Sous

anstatt 15 Sous gehabt hätte, so würde man dennoch das Produkt mit 1 Sous gebildet haben, solches aber nach der Auffindung des Produktes mit 5 Deniers wegstreichen.

Hier zwei andere Beispiele:

	12 Livres	18 Sous	8 Deniers.
	42 Toisen	5 Fuß	4 Zoll.
	24 Livres		
	48		
Für 18 S.	37	16 S.	
Fl. Prod. v. 1 S.	2	2	
Produkt 4 D.	0	14	
Produkt 4 D.	0	14	
3 F.	6	9	4 D.
2 F.	4	6	$2\frac{2}{3}$
4 Z.	0	14	$4\frac{4}{9}$
	554	13	$11\frac{1}{9}$

	37 Liv.	15 Sous	8 Deniers.
	9 Toisen	3 Fuß	11 Zoll.
	340 Liv.	1 S.	0 D.
Pr. 3 F.	18	17	10
Fl. P. v. 1 F.	6	8	$11\frac{1}{3}$
Pr. 4 Z.	2	1	$11\frac{7}{9}$
4 Z.	2	1	$11\frac{7}{9}$
3 Z.	1	11	$5\frac{5}{6}$
Summe	364	14	$3\frac{7}{18}$

Anmerkung. Die Multiplication mehrnamiger Zahlen kann auch dadurch verrichtet werden, daß man Multiplicand und Multiplicator auf Einheiten ihrer höchsten Ordnung zurückbringt und dann die dadurch erhaltenen einnamigen gebrochenen Zahlen mit einander multiplicirt. Hiernach das erste Beispiel im ersten Fall: (45 Livres 12 Sous 6 Deniers) $\times\ 17\frac{2}{3}$ = (45 Livres $12\frac{1}{2}$ Sous) $\times\ 17\frac{2}{3} = 45\frac{5}{8}$ Livres $\times\ 17\frac{2}{3} = \frac{365}{8} \times \frac{53}{3}$ Livres $= \frac{19345}{24}$ Livres $= 806\frac{1}{24}$ Livres = 806 Liv. 0 Sous 10 Deniers. Das erste Beispiel im zweiten Fall: (51 Livres 15 Sous 5 Deniers) $\times$ (36 Mark 6 Unzen 4 Quentchen) = (51 Liv. $15\frac{5}{12}$ S.) $\times$ (36 Mark $6\frac{1}{2}$ Unzen) = (51 $\frac{37}{12.4}$ Liv.) $\times \frac{589}{16}$ M. $= \frac{1463665}{768}$ Liv. = 1905 $\frac{6\ 25}{12.4.16}$ Liv. = 1905 Liv. $16\frac{13}{16.12}$ Sous = 1905 Liv. 16 S. $3\frac{5}{16}$ Deniers.

§. 58. Da der Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividend hervorbringt, so wird die Division zwei Fälle darbieten, je nachdem der Quotient oder der Divisor den Multiplicator darstellt, und als abstracte Zahl zu betrachten ist.

Erster Fall. Wenn der Divisor als Multiplicator gilt, so ist der Quotient der Multiplicand und mit dem Dividend, der das Produkt darstellt, von einerlei Art.

Ist der Divisor einnamig, so dividirt man nach und nach jede Art von Einheiten des Dividends, mit der höchsten Ordnung den Anfang

machend. Um z. B. 234 Livres 15 Sous 7 Deniers durch 4 zu dividiren, nimmt man den vierten Theil von 234 Liv., der 58 Liv. macht; den Rest von 2 Liv. reducirt man in Sous, um sie zu den 15 Sous des Dividends zu addiren, was $40 + 15 = 55$ gibt; der vierte Theil hiervon ist 13 Sous nebst dem Reste 3 Sous oder 36 Deniers; $36 + 7 = 43$ Deniers, der vierte Theil hiervon ist $10\frac{3}{4}$ Den. Der Quotient ist folglich 58 Livres 13 Sous $10\frac{3}{4}$ Deniers.

Ein Arbeiter hat 151 Liv. 14 S. 6 Den. für 42 Arbeitstage erhalten; man soll den Taglohn bestimmen. Man dividirt deshalb 151 L. 14 S. 6 D. durch die abstracte Zahl 42. Die Rechnung sieht man hier neben ausgeführt.

151 L. 14 S. 6 D.	42
25 L.	3 L. 12 S. 3 D.
500 S.	
14	
514 S.	
94	
10	
120 D.	
6	
126	
0	

Wenn der Divisor, wie in dem ersten Beispiele, einziffrig ist, braucht man sich nicht genau an die hier gegebene Vorschrift zu halten, sondern nur den Quotienten anzuschreiben, indem das Gedächtniß die successiven Reste leicht vorführen kann. Auf diese Weise ist man in §. 18 verfahren, desgleichen in den Beispielen der Multiplication mit mehrnamigen Zahlen, als man die Hälfte, das Drittel, das Viertel ꝛc. zu nehmen hatte.

Ist der Divisor mehrnamig, aber noch als abstracte Zahl anzusehen, so muß man vorerst die in ihm vorkommenden Brüche wegschaffen. Man multiplicirt deshalb Dividend und Divisor mit der Anzahl der in der Haupteinheit des letztern enthaltenen Einheiten seiner niedrigsten Unterabtheilung. Diese Operation ändert keineswegs den Quotienten (§. 15, 1°); der Divisor wird ganzzahlig sein, da jede Art seiner Einheiten ganze Einheiten geben wird. Z. B. 42 Toisen 5 Fuß 4 Zoll haben 554 Liv. 13 S. $11\frac{1}{9}$ Deniers gekostet; man soll den Preiß einer Toise finden. Man muß die zweite Zahl durch die erste, als abstracte Zahl angesehen, dividiren. Da 4 Zoll, oder $\frac{1}{3}$ Fuß 18 mal in einer Toise enthalten sind, so wird man die beiden vorgelegten Zahlen mit 18 multipliciren. Die Aufgabe heißt dann: 772 Toisen haben 9984 Liv. 10 S. 8 Den. gekostet; welches ist der Preis einer Toise? Die Division von 9984 Livres 10 Sous 8 Den. durch die abstracte Zahl 772 gibt zum Quotienten 12 Liv. 18 S. 8 Den.. Um 806 Liv. 0 S. 10 D. durch $17\frac{2}{3}$ zu dividiren; multiplicirt man mit 3, und hat sonach 2418 L.

2 S. 6 Den. durch 53 zu dividiren. Ist der Divisor 3 Mark 7 Unzen 4 Quentchen, so multiplicirt man mit 16, weil 4 Quentchen oder die Hälfte einer Unze 16 mal in einer Mark enthalten ist.

Zweiter Fall. Wenn der Divisor der Multiplicand ist, so muß er mit dem Dividend von einerlei Art sein; der Quotient ist eine abstracte Zahl, die angibt, wie viel mal der eine den andern enthält. Die Brüche des Dividends und Divisors werden, wie so eben angegeben, weggeschaft, und beide dann als abstracte Zahlen betrachtet; in der That enthalten 12 Livres 3 Livres eben so oft, als 12 die 3 enthält.

Um z. B. 364 Liv. 14 S. $3\frac{7}{18}$ Deniers durch 37 Liv. 15 S. 8 D. zu dividiren, multiplicire man beide Zahlen mit $20 \times 12 \times 18$, oder 4320, weil $\frac{1}{18}$ Denier 4320 mal in einer Livre enthalten ist. Man hat sonach 1575565 durch 163224 zu dividiren, was $9\frac{106549}{163224}$ gibt. Um die Probe mittelst der Multiplication zu machen (§. 57), muß man den Bruch in Theilen der Toise ausdrücken, was wir sogleich zeigen werden. Wie oft sind 11 Livres in 143 Livres 17 S. 6 D. enthalten? Man multiplicirt mit 40, und dividirt die Produkte 5755 und 440 durch einander; man findet $13\frac{7}{88}$ mal.

Anmerkung. Bei der Division mit mehrnamigen Größen muß man vor der Operation untersuchen, welches die Einheit des Quotienten ist; denn durch solche wird die Verwandlung der Reste in Unterabtheilungen bedingt. Durch verschiedene Mittel kann man öfters derlei Rechnungen vereinfachen; Uebung ist auch hier der beste Führer.

§. 59. Die gewöhnlichen Brüche, die zehntheiligen und mehrnamigen, sind die drei Arten der im Gebrauche vorkommenden Brüche. Wir wissen, wie man die beiden ersten wechselseitig in einander verwandelt (§§. 50 und 53); wir wollen nun sehen, wie solche in einen mehrnamigen, und umgekehrt, verwandelt werden.

Man reducirt einen Bruch in eine mehrnamige Zahl dadurch, daß man den Zähler durch den Nenner dividirt. Um so $\frac{5}{7}$ einer Livre zu erhalten, dividirt man 5 Liv. durch 7, und erhält 14 S. $3\frac{3}{7}$ Den.

Anmerkung. Man könnte dies auch folgendermaßen ausdrücken: Soll ein Bruch einer höhern Benennung in Einheiten der niedrigern Ordnung aufgelöst werden, so multiplicirt man den Zähler dieses Bruches mit der Zahl, welche angibt, wie viel Einheiten der niedrigern Benennung eine Einheit der höhern Art

machen. Dividirt hierauf mit dem Nenner, verwandelt den übrigbleibenden Bruch in Einheiten der nun nächst niedern Ordnung. Z. B. $\frac{5}{8}$ Gulden $= \frac{5}{8} \times 60$ Kreuzer $= \frac{5 \times 15}{2}$ Kreuzer $= \frac{75}{2}$ Kreuzer $= 37\frac{1}{2}$ Kreuzer $= 37$ Kr. 2 Heller.

Um umgekehrt eine mehrnamige Zahl auf einen wirklichen Bruch zurückzuführen, wird man sie in Einheiten ihrer niedrigsten Art auflösen. Z. B. 14 Sous $3\frac{3}{7}$ Deniers sind so viel wie $171\frac{3}{7}$ Den., oder $\frac{1200}{7}$ Den. Da 240 Den. eine Livre ausmachen, so muß man mit 240 dividiren, was $\frac{1200}{1680}$ oder $\frac{5}{7}$ Livre gibt.

Anmerkung. Man könnte dies auch so geben: Soll eine benannte Zahl auf Einheiten einer höhern Ordnung reducirt werden, so dividirt man die gegebene Zahl durch die Zahl, welche angibt, wie viel Einheiten der niedrigern Art auf eine Einheit der höhern Ordnung gehen. Z. B. 24 Kreuzer $= \frac{24}{60}$ Gulden $= \frac{2}{5}$ Gulden.

Um den Bruch 0,715 Livre in Sous und Deniers aufzulösen, muß man mit 20 multipliciren, was 14,3 Sous gibt; multiplicirt man 0,3 Sous mit 12, so hat man 3,6 Den.; folglich 0,715 Livre = 14 S. 3,6 Den. Ein mehrnamiger Bruch wird auf einen Decimalbruch reducirt, wenn man ihn vorerst in einen wirklichen Bruch, und diesen dann in einen Decimalbruch verwandelt (§. 50).

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen und Wurzeln.

Bildung der Potenzen.

§. 60. Wird eine Zahl 1, 2, 3... mal nach und nach mit sich selbst multiplicirt, so erhält man ihre zweite, dritte, vierte... Potenz, wie aus folgender Tabelle ersichtlich ist:

1te.	2te.	3te.	4te.	5te.	6te.	7te.	8te.	9te.
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Das Quadrat (§. 41) von $\frac{3}{5}$ ist $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$; der Cubus ist $\frac{27}{125}$... Will man höhere Potenzen bilden, so braucht man nicht successive vom Quadrat zum Cubus, vom Cubus zur vierten Potenz u. s. w. überzugehen. Es werde 3^{11} verlangt. Da es sich darum handelt, 3 eilfmal als Factor zu nehmen, so zerlege ich 11 in $3 + 4 + 4$, und erhalte $3^3 \times 3^4 \times 3^4$. Man zerfällt demnach die vorgelegte Potenz in andere, deren Exponentialsumme gleich dem Exponent der fraglichen Potenz ist; diese Resultate sind dann miteinander zu multipliciren: **bei der Multiplication werden sonach die Exponenten addirt.** In unserm Beispiele ist $3^3 = 27$, $3^4 = 81$; durch Multiplication erhält man $3^7 = 2187$; durch eine zweite Multiplication mit 81 findet man $3^{11} = 177147$.

Man bemerke, daß $3^4 \times 3^4$ nichts anders als das Quadrat von 3^4 ist, oder $81^2 = 6561$; indem man also $(3^4)^2$ oder 6561 mit $3^3 = 27$ multiplicirt, erhält man gleichfalls 3^{11}; die 12te Potenz ist $3^4 \times 3^4 \times 3^4 =$ dem Cubus von 3^4 oder $(3^4)^3$; man hat $3^{12} = 81^3 = 531441$; wird durch 3 dividirt, so kommt $3^{11} = 177147$. Ueberhaupt zerlege den Grad der vorgelegten Potenz in 2 Factoren, bilde die durch den einen Factor angedeutete Potenz und erhebe das Resultat auf die durch den andern Factor angezeigte Potenz; oder in andern Worten, **um auf eine Potenz zu erheben, multiplicire den Exponent mit dem Grad der Potenz.** Für 5^{17} setzt man $\frac{1}{5} \times 5^{18}$. Nun ist $18 = 2 \times 3 \times 3$; also $5^{18} = 5^{2 \cdot 3 \cdot 3}$; man nimmt daher das Quadrat von 5, erhebt solches auf den Cubus, das Resultat darauf noch einmal auf den Cubus, und erhält die 18te Potenz; dann dividirt man

durch 5, um die 17te Potenz zu erhalten. Hiernach steht die Rechnung: $5^2 = 25$, $25^3 = 5^6 = 15625$, dessen Cubus $5^{18} = 3814697265625$; endlich $5^{17} = 762939453125$. Zu bemerken ist hierbei, mit welcher Schnelligkeit die Potenzen wachsen. Die 64te Potenz von 2 ist 18446744073709551616.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 61. Das Quadrat einer aus zwei Ziffern bestehenden Zahl, wie z. B. 35, wird durch die Multiplication von 35 mit 35 erhalten, eine Operation, die 4 Partialprodukte liefert: 1) 5×5, oder das Quadrat der Einer; 2) 30×5, oder das Produkt der Zehner mit den Einern; 3) noch einmal das Produkt 30×5; 4) 30×30, oder das Quadrat der Zehner. Das Quadrat einer zweiziffrigen Zahl besteht also aus dem Quadrat der Zehner, aus dem doppelten Produkte der Zehner mit den Einern, endlich aus dem Quadrat der Einer; folglich $35^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$.

Um $7 + 5$ mit $7 + 5$ zu multipliciren, multiplicirt man 7 und 5 vorerst mit 7, dann mit 5, und addirt die Produkte, was $7^2 + 7 \times 5$ einerseits, und $7 \times 5 + 5^2$ anderseits gibt. Also $12^2 = 49 + 25 + 2.35 = 144$. Um folglich das Quadrat von $7 + 5$ zu bilden, reicht es nicht hin 7 und 5 aufs Quadrat zu erheben, das doppelte Produkt von 7 mit 5 muß noch hinzugefügt werden. Das Quadrat einer zweitheiligen Größe besteht aus dem Quadrat eines jeden Theils, und dem doppelten Produkte dieser Theile.

§. 62. Die Produkte von 10, 100, 1000... sind 100, 10000, 1000000..., oder 1 mit doppelt so viel angehängten Nullen, als deren in der Wurzel vorkommen. Also jede einziffrige oder zwischen 1 und 10 liegende Zahl hat ihr Quadrat zwischen 1 und 100, d. h. es besteht aus einer oder zwei Ziffern; ebenso hat jede zweiziffrige Zahl drei oder vier Ziffern in seinem Quadrat, 2c. Ueberhaupt hat das Quadrat doppelt so viel Ziffern, oder eine Ziffer weniger als die Wurzel.

Wir gehen jetzt zum Geschäft des Quadratwurzelausziehens. Die Quadratwurzeln oder eine der zweiziffrigen Zahlen sind in der Tabelle §. 60 enthalten. Hinsichtlich der andern Zahlen sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Wenn die vorgelegte Zahl, wie z. B. 784, drei oder vier Ziffern enthält, so hat ihre Wurzel deren zwei; und 784 besteht aus dem Quadrat der Zehner der Wurzel, dem Quadrat der Einer und dem doppelten Produkte der Zehner mit den Einern. Nun wird der erste dieser Theile gebildet, indem man zwei Nullen dem Quadrate der Ziffer der Zehner anhängt (§. 13); woraus sich ergibt, daß dieses Quadrat, bei der Addition jener drei Theile, erst in der Stelle der Hunderte eintritt. Sondert man hiernach die zwei Ziffern 84 ab, so ist ersichtlich, daß 7 das Quadrat der Zehner, solche als einfache Einheiten betrachtet, enthält, ausserdem aber noch die durch die übrigen Theile des Quadrats hervorgebrachten Hunderte. Man nimmt daher die Wurzel des größten in 7 enthaltenen Quadrats 4, sie wird die gesuchte Ziffer der Zehner sein. Denn 7 liegt zwischen den Quadraten von 2 und 3, die gegebene Zahl 784 zwischen 20^2 und 30^2; folglich die Wurzel zwischen 20 und 30, und man erhält 2 als Ziffer der Zehner. Wird 4 von 7 abgezogen, so ist der Rest 3 das Zurückbehaltene; folglich besteht 384 aus dem Quadrate der Einer und dem zweifachen Produkte der Zehner mit den Einern.

Man bildet das Produkt des Doppelten der Zehner mit den Einern, indem man das Doppelte der Ziffer der Zehner mit den Einern multiplicirt, und dem Resultate zur Rechten eine Null anhängt. Bei der Addition übt dieses Produkt erst in der Stelle der Zehner seinen Einfluß aus, ist daher in 38 enthalten, indem man von 384 die Ziffer der Einer abschneidet. Ausserdem enthält 38 die durch das Quadrat der Einer hervorgebrachten Zehner, so wie diejenigen, die etwa da herrühren, im Falle 784 kein vollständiges Quadrat wäre. Kennte man diese Zehner, so würde, nach ihrer Hinwegnahme von 38, der Rest das in Frage stehende doppelte Produkt sein. Der Quotient, welchen man bei der Division dieses Restes durch 4, das Doppelte der Ziffer der gefundenen Zehner, erhält, würde die Ziffer der Einer sein. Wir dividiren also 38 durch 4; der Dividend ist zwar größer als der, den man anwenden sollte; der Quotient kann demnach zu groß werden, leicht ist's aber, ihn zu verbessern. Denn stellt in der That der Quotient $\frac{38}{4}$, oder 9 als ganze Zahl, die Einheiten dar, so wird, durch Nebenansetzen der 9 an das Doppelte der Ziffer der Zehner, 49 das Zweifache der Zehner nebst den Einern, und 49×9 das doppelte Produkt der Zehner mit den Einern, nebst dem Quadrat der Einer sein.

Aber $49 \times 9 = 441 > 384$; 9 ist daher zu groß. Man macht dieselbe Probe mit der Ziffer 8: da $48 \times 8 = 384$, welche Zahl, vom Reste abgezogen, 0 übrig läßt; so ist 784 das vollständige Quadrat von 28. Wir haben den Gang dieser Rechnung hier mitgetheilt, desgleichen den von $\sqrt{2735}$, welcher 52 mit dem Reste 31 gibt; darnach ist 52 die Wurzel des größten in 2735 enthaltenen Quadrats, d. h. von $2735 - 31$, oder 2704. Eben so findet man $\sqrt{121} = 11$.

7.8 4	28	
3 8.4	49	48
3 8 4	9	8
0	441	384

27.3 5	52
2 3.5	102
2 0 4	2
3 1	204

1.2 1	11
2.1	21
2 1	1
0	21

Zweiter Fall. Hat das Quadrat mehr als vier Ziffern, so wendet man dieselbe Schlußweise an; denn obgleich die Wurzel dann deren mehr als 2 enthält, so kann man sie doch aus Zehnern und Einern bestehend ansehen: 523 z. B. hat 52 Zehner und 3 Einer.

Für 273529 ist aus ähnlichen Gründen ersichtlich, daß das Quadrat der Zehner, als einfache Einheiten betrachtet, in 2735 enthalten ist (indem man die Ziffern 29 zur Rechten absondert), und daß die Wurzel des größten in 2735 enthaltenen Quadrats die Zehner gibt. Man findet 52 für diese Wurzel und 31 zum Reste; wird nun 29 heruntergenommen und neben 31 angesetzt, so ist 3129 das doppelte Produkt der Zehner 52 mit den unbekannten Einern, nebst dem Quadrate der Einer. Man läßt die Ziffer 9 weg und dividirt 312 durch 104, das Doppelte der Zehner 52. Man findet den Quotienten 3, der die Einer der Wurzel oder eine größere Zahl ist. Diesen Quotienten schreibt man endlich rechts neben 104, multiplicirt 1043 mit 3, zieht das Produkt 3129 vom Reste 3129 ab; 523 ist darnach genau die gesuchte Wurzel.

27.3 5.2 9	523	
2 3.5	102	1043
2 0 4	2	3
3 1 2.9	204	3129
3 1 2 9		
0		

Diese Beweisart ist auf jede Zahl anwendbar. Man theilt hiernach die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je zwei Ziffern, was in der letzten Klasse nur eine Ziffer gibt, sobald die Zahl der Ziffern ungerade ist. Jede Klasse gibt eine Ziffer der Wurzel, indem man bei jeder einzelnen Klasse, wie eben gesagt, verfährt.

Bei einer gegebenen Zahl ist's hiernach leicht, die Anzahl der Ziffern von vornherein zu bestimmen. Ist die Wurzel nicht genau, so führt

die Rechnung auf einen Rest; wir werden den Gebrauch dieses Restes zur annähernden Bestimmung der Wurzel zeigen.

Man bemerke auch, daß es unnöthig ist, die verschiedenen abzuziehenden Produkte hinzuschreiben, und daß man, wie bei der Division, jede Multiplication und Subtraction auf einmal verrichten kann.

11.11.08.88.89	33 333		54.00.00.00	7348
21.1	63	663	50.0	143 × 3
189	3	3	710.0	1464 × 4
220.8	189	1989	12440.0	14688 × 8
1989			Rest... 689.6	
2198.8	6 663	66 663		
19989	3	3		
19998.9	19 989	199 989		
Rest... 0				

Man kann sich auch an folgenden Beispielen üben: $\sqrt{7283291} = 2698$, Rest 4089; $\sqrt{3179089} = 1783$.

§. 63. Commensurable oder rationale Zahlen nennt man diejenigen, welche ein gemeinschaftliches Maß mit der Einheit haben; eine solche ist $\frac{2}{5}$, weil das Fünftel der Einheit fünfmal in 1, und zweimal in $\frac{2}{5}$ enthalten ist. Jede ganze Zahl aber, die kein vollkommenes Quadrat einer ganzen Zahl ist, kann auch nicht das Quadrat einer gebrochenen Zahl sein; ihre Wurzel ist also incommensurabel oder irrational, d. h. sie kann in Theilen der Einheit nicht genau ausgedrückt werden; denn wäre ein gemeinschaftliches Maß mit der Einheit vorhanden, und dasselbe z. B. 5 mal in der Einheit und 13 mal in $\sqrt{7}$ enthalten, so daß (§. 36) die Wurzel aus 7 genau durch $\frac{13}{5}$ dargestellt würde, also die Gleichung $\frac{13}{5} = \sqrt{7}$ bestände, so hätte man $\frac{169}{25} = 7$, wenn man auf beiden Seiten auf's Quadrat erhebt, was ungereimt ist, da $\frac{169}{25}$ einen irreducirbaren Bruch ausdrückt (§. 41).

Theilt man die Einheit in gleiche Theile, so kann man solche niemals klein genug machen, damit einer derselben genau in $\sqrt{7}$ enthalten sei; kein Bruch kann hiernach den richtigen Werth von $\sqrt{7}$ darstellen. Will man ein genaues Maß dieses Ausdruckes haben, so muß man eine andere Einheit nehmen (§. 36); es sei denn, daß man sich mit einer Annäherung begnügt, wo man die Theile der Einheit hinlänglich klein macht, damit die Differenz zwischen $\sqrt{7}$ und einer gewissen Anzahl solcher Theile als zu unbedeutend ausser Acht gelassen werden kann.

Enthält z. B. die Einheit 100 Theile, und findet man, daß 2 Einheiten + 64 solcher Theile $< \sqrt{7}$, während 2 + 65 solcher Theile $> \sqrt{7}$ sind, d. h., daß 7 zwischen den Quadraten von 2,64 und 2,65 liegt: so sagt man, $\sqrt{7}$ liegt zwischen diesen Zahlen, und man kennt diese Wurzel bis auf ein Hundertel genau. Es erklärt dies die Sonderbarkeit der Aussage, daß man dem Werthe von $\sqrt{7}$ so nahe, als man nur immer will, kommen kann, ohnerachtet $\sqrt{7}$ keine numerische Existenz hat.

Will man die Größen, welche kleiner als das Fünftel der Einheit sind, vernachläßigen, so muß man finden, wie viel $\sqrt{7}$ solcher Fünftel enthält, d. h. zwei Brüche suchen, wie $\frac{13}{5}$ und $\frac{14}{5}$, die 5 zum Nenner haben, deren Zähler nur um 1 verschieden sind, und zwischen denen $\sqrt{7}$, oder vielmehr zwischen deren Quadraten 7 liegt. Um diese Zähler 13 und 14 zu finden, denken wir uns die Quadrate jener Brüche und das Quadrat von 7 mit 25 multiplicirt: 25×7 liegt zwischen den Quadraten der unbekannten Zähler, folglich $\sqrt{(25 \times 7)}$ oder $\sqrt{175}$ zwischen diesen Zählern. Nun fällt $\sqrt{175}$ zwischen 13 und 14; also sind $\frac{13}{5}$ und $\frac{14}{5}$ die gesuchten Brüche oder die genäherten Werthe von $\sqrt{7}$ bis auf $\frac{1}{5}$ genau, der eine zu klein, der andere zu groß. Eben so multiplicirt man mit 11^2 oder 121, wenn man $\sqrt{3\frac{5}{7}}$ bis auf $\frac{1}{11}$ genau haben will; man erhält $449\frac{3}{7}$, aus der man die Wurzel blos als ganze Zahl ziehen muß, solche ist 21, daher liegt $\sqrt{3\frac{5}{7}}$ zwischen $\frac{21}{11}$ und $\frac{22}{11}$ oder 2. Man bemerke, daß in $449\frac{3}{7}$ nicht nur der Bruch $\frac{3}{7}$, sondern auch der ganze Theil von 449, um den sie das Quadrat von 21 übertrifft, ausser Acht gelassen wurde. Um also aus einer Zahl die Wurzel bis auf eine bestimmte Grenze genau zu ziehen, multiplicirt man sie mit dem Quadrat des gegebenen Nenners, und zieht dann aus dem Produkte die Wurzel blos als ganze Zahl; solche ist der gesuchte Zähler.

§. 64. Will man mit Hülfe der Decimalbrüche, d. h. bis auf 0,1; 0,01..., genaue Näherungswerthe erhalten, so muß man die Zahl mit dem Quadrat von 10, von 100.... multipliciren, oder was dasselbe ist, das Komma um zweimal so viel Stellen nach der Rechten rücken, als man Decimalziffern verlangt, indem man die erforderliche Anzahl von Nullen nöthigenfalls anhängt. $\sqrt{0,3}$ bis auf 0,01 genau ist $\frac{1}{100}\sqrt{3000}$, indem das Komma um 4 Stellen weiter gerückt wird, oder $\frac{1}{100} \times 54 = 0,54$. Desgleichen ist $\sqrt{5,7}$ bis auf $\frac{1}{100}$ genau, $\frac{1}{100}\sqrt{57000}$ oder 2,38. Anstatt eine lange Reihe von

Nullen der vorgelegten Zahl anzuhängen, kann man sich begnügen, diese Nullen paarweise dem jedesmaligen Reste beizufügen. Man sieht dies in untenstehenden Rechnungen ausgeführt.

2	1,41421356	3.21	17,916...
10.0	24	22.1	27
40.0	281	3 20.0	349
11 90.0	2824	5 90.0	3581
60 40.0	28282	2 31 90.0	35826
3 83 60.0	282841	16 94 4 ꝛc.	
1 00 75 9 ꝛc.			

Hiernach ist's hinreichend, um eine Decimalstelle zu erhalten, eine Klasse von 2 Nullen neben den ersten Rest zu setzen. Für die zweite Decimalstelle setzt man ebenso 2 Nullen neben den zweiten Rest, ꝛc. Die Stelle des Komma's wird sogleich angedeutet, und die Rechnung bis zum gewünschten Grade von Genauigkeit fortgesetzt, indem man dem jedesmaligen Reste zwei Nullen anhängt.

Die Wurzel eines Produktes ist das Produkt der Wurzeln seiner Factoren. Da $144 = 9 \times 16$, so ist $\sqrt{144} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$. Diese Regel, welche sich auf das in §. 60 Gesagte stützt, kann dazu dienen, das Geschäft des Wurzelausziehens zu vereinfachen: $\sqrt{8} = \sqrt{(2 \times 4)} = 2\sqrt{2} = 2 \times 1,4142... = 2,82842712$.

§. 65. **Die Wurzel eines Bruches wird dadurch gefunden, daß man die Wurzel aus jedem seiner beiden Glieder zieht.** Es ergibt sich dies aus der Bildungsweise seines Quadrats (§. 41). $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

Die Wurzel ist irrational, sobald die Glieder keine vollständigen Quadrate sind. Könnte z. B. $\sqrt{\frac{3}{7}}$ einen andern Bruch, wie $\frac{5}{11}$, darstellen, so wäre $\frac{3}{7} = \frac{25}{121}$, was unmöglich ist (§. 38). Man kann also die Wurzel nur näherungsweise bis zu einem durch die Natur der Aufgabe gegebenen Grad von Genauigkeit finden; man verfährt dann wie im §. 63 angegeben ist. Um z. B. $\sqrt{\frac{3}{7}}$ bis auf $\frac{1}{11}$ genau zu finden, multiplicirt man $\frac{3}{7}$ mit $121 = 11^2$; man hat $\sqrt{\frac{363}{7}} = \sqrt{51\frac{6}{7}}$; zieht man nun die Wurzel aus 51 bis auf eine Einheit genau, so erhält man $\sqrt{\frac{3}{7}}$ zwischen $\frac{7}{11}$ und $\frac{8}{11}$.

Man bemerke, daß $\sqrt{\frac{3}{7}}$ so viel wie $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ist; denn multiplicirt man diesen Ausdruck mit sich selbst, so findet man $\frac{3}{7}$ als Produkt. Ausserdem daß diese doppelte Wurzelausziehung zwei genäherte Werthe verlangt, ist der Grad der Annäherung des Resultats noch unsicher. Es ereignet sich öfters, daß dieser Grad erst am Schlusse der Rechnung bestimmt wird; dieser Theil der Rechnung müßte in der Art geführt werden, daß er eine unbegrenzte Annäherung zuließe. Man multiplicirt deshalb die beiden Glieder des Bruches mit seinem Nenner, damit solcher ein vollständiges Quadrat werde. $\frac{3}{7}$ wird $\frac{21}{49}$, indem man oben und unten mit 7 multiplicirt, und $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{21}$; die Rechnung wird bis zu dem gewünschten Grade von Genauigkeit fortgesetzt. Nimmt man z. B. $\sqrt{21} = 4{,}582$, d. h. bis auf 0,001 genau, so ist $\frac{1}{7}$ davon $=$ 0,654.

Wäre $\sqrt{\frac{3}{7}}$ bis auf $\frac{1}{7}$ genau verlangt, so gäbe die Rechnung $\frac{1}{7}\sqrt{21}$ zwischen $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{7}$.

Für $\sqrt{3\frac{5}{7}}$ schreibt man $\sqrt{\frac{26}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{(26 \times 7)} = \frac{1}{7}\sqrt{182} = \frac{13{,}4907\ldots}{7}$ $= 1{,}9272$.

§. 66. Die Richtigkeit folgender Gleichungen wird dadurch dargethan, daß man ihre beiden Glieder aufs Quadrat erhebt:

$$4 \times \sqrt{7} = \sqrt{7} \times 4 = \sqrt{(16 \times 7)}. \quad \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{(5 \cdot 3)}}{\sqrt{(7 \cdot 3)}}. \quad \sqrt{\tfrac{2}{3}} \times \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{(\tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{4})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} : \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \times \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \sqrt{\tfrac{8}{9}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Man kann also die Ordnung der irrationalen Factoren verwechseln, und die beiden Glieder eines irrationalen Bruches mit einem und demselben Factor multipliciren.

Wir schließen nun mit einigen Bemerkungen:

1) Man muß die gegebenen Zahlen immer dergestalt einrichten, daß das Geschäft des Wurzelausziehens nur mit Ganzen vorzunehmen ist.

2) Die Anzahl der Decimalziffern eines Quadrats ist immer gerade und doppelt so groß als die der Wurzel. Man muß hiernach Nullen anhängen oder Decimalstellen weglassen, wenn dieser Bedingung in allen Fällen Genüge geleistet werden soll.

3) Jede Klasse gibt nur eine Ziffer der Wurzel; mehr als 9 kann daher auf einmal in derselben nicht angesetzt werden.

4) Das Quadrat einer ganzen Zahl, wie z. B. 18, sei gegeben; um hieraus das Quadrat der nächstfolgenden Zahl abzuleiten, hat man $18^2 + 2 \times 18 + 1$ (§. 61), da $19 = 18 + 1$ ist; man fügt also 37 zu 324, dem Quadrate von 18, hinzu, und erhält $361 = 19^2$. Ueberhaupt addirt man zu dem Quadrat einer ganzen Zahl 1 mehr als das doppelte Produkt dieser Zahl, so hat man das Quadrat der nächstfolgenden ganzen Zahl. Hieraus ist ersichtlich, daß bei dem Ausziehen der Quadratwurzel jeder Rest kleiner als das Zweifache der entsprechenden Wurzel sein muß; denn fände man einen größern Rest als dies Zweifache, so müßte man eine Einheit mehr in dieser Wurzel setzen.

5) Die Probe des Wurzelausziehens geschieht durch Erhebung der Wurzel aufs Quadrat. Wird nämlich die Wurzel mit sich selbst multiplicirt und dem Produkte der Rest hinzugefügt, so muß man die gegebene Zahl wieder erhalten; dieser Rest muß übrigens kleiner als das Doppelte dieser Wurzel sein.

Anmerkung. Die irrationalen Wurzeln können keine periodischen Decimalbrüche werden; denn würde eine solche Wurzel sich durch einen periodischen Decimalbruch ausdrücken lassen, so könnte man diesen, mithin auch die Wurzel in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln (§. 53); die irrationale Wurzel wäre also rational, was gegen die Annahme ist.

Von der Ausziehung der Cubikwurzel.

§. 67. Bevor wir an das Geschäft des Cubikwurzelausziehens gehen, ist's passend, das Gesetz zu ermitteln, nach welchem der Cubus sich bildet, der nichts anders als das Produkt einer Zahl mit ihrem Quadrat ist. Denkt man sich diese Zahl in zwei Theile zerlegt, so hat man gesehen (§. 61), daß das Quadrat derselben aus dem Quadrate des ersten Theils, dem Quadrate des zweiten Theils und dem doppelten Produkte dieser Theile bestehe; das System von diesen drei Größen muß jetzt mit den zwei Theilen der gegebenen Zahl multiplicirt werden. Multiplicirt man nun jene Größen mit dem ersten Theile, so hat man:

$$(7+5)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2$$
$$7 + 5$$

1) Cubus des ersten Theils . . . . 7^3

2) 2 mal das Quadrat des ersten Theils × dem zweiten Theil . . . . $2 \times 7^2 \times 5$

3) Der erste Theil × dem Quadrate des zweiten Theils . . . . 7×5^2

Multiplicirt man ebenso jene drei Theile mit dem zweiten Theile der gegebenen Zahl, so kommt:

1) Das Quadrat des ersten Theils × dem zweiten . . . . $7^2 \times 5$

2) 2 mal das Quadrat des zweiten Theils × dem ersten . . . . $2 \times 7 \times 5^2$

3) Cubus des zweiten Theils . . . . . . 5^3

Durch Vereinigung dieser Resultate . . $7^3 + 3 \times 7^2 \times 5 + 3 \times 7 \times 5^2 + 5^3$

Der Cubus jeder zweitheiligen Zahl besteht hiernach aus vier Theilen, nämlich: 1) aus dem Cubus des ersten Theils; 2) dem dreifachen Produkte des Quadrats des ersten Theils, multiplicirt mit dem zweiten; 3) dem dreifachen Produkte des Quadrats des zweiten Theils, multiplicirt mit dem ersten; 4) aus dem Cubus des zweiten Theils.

Hieraus folgt, daß der Cubus einer zweiziffrigen Zahl aus dem Cubus der Zehner, dem dreifachen Quadrat der Zehner multiplicirt mit den Einern, dem dreifachen Quadrat der Einer multiplicirt mit den Zehnern, endlich aus dem Cubus der Einer besteht.

§. 68. Der Cubus von 10, 100, 1000.... besteht aus 1 mit dreimal so viel angehängten Nullen. Eine zweiziffrige, d. h. eine zwischen 10 und 100 liegende Zahl, hat ihren Cubus zwischen 1000 und 1000000, enthält also vier, fünf oder sechs Ziffern. Ueberhaupt hat der Cubus einer Zahl entweder dreimal so viel Ziffern als die Wurzel, oder eine auch zwei Ziffern weniger. Die Wurzeln der Zahlen, welche kleiner als 1000 sind, haben nur eine Ziffer; die Tabelle (§. 60) lehrt sie kennen. Das Cubikwurzelausziehen der andern Zahlen begreifen wir unter zwei Fällen:

Erster Fall. Hat die Cubikwurzel nur zwei Ziffern, wie die von 21952, so bemerke ich, daß der Cubus der gesuchten Zehner sich

dadurch findet, daß man dem Cubus der Ziffer der Zehner drei Nullen zur Rechten anhängt (§. 13). Werden hiernach die drei Ziffern 952 der vorgelegten Zahl abgesondert, so enthält 21 den Cubus der Ziffer der Zehner, solche als einfache Einheiten betrachtet, ausserdem noch die Tausende, welche von den andern Theilen herrühren. Der größte in 21 vorhandene Cubus ist 8, dessen Wurzel 2 ist, d. h. die Ziffer der Zehner; denn da 21 zwischen den Cuben von 2 und 3 liegt, so ist 21952 zwischen den Cuben von 20 und 30 enthalten. Ziehen wir 2^3 oder 8 von 21 ab, so bleibt 13952, welcher die drei übrigen Theile des Cubus darstellt. Das Produkt des dreifachen Quadrats der Zehner mit den Einern wird nun dadurch gebildet, daß man das dreifache Quadrat von 2, das ist 12, mit den Einern multiplicirt, und dem Produkte 2 Nullen zur Rechten anhängt. Schneidet man demnach die beiden Ziffern 52 von dem Reste ab, so wird die Zahl 139 zwölfmal die Einer enthalten, ausserdem aber noch die durch die übrigen Theile des Cubus hervorgebrachten Hunderte. Wir dividiren deßhalb 139 durch 12, der Quotient wird die Einer oder eine größere Zahl sein. Da diese Ziffer die 9 nicht übersteigen kann, so nehmen wir 9 als Quotienten von $\frac{139}{12}$ an. Es fragt sich jetzt, ob 9 größer als die Einer sei. Unter 1200, welches das Dreifache des Quadrats der Zehner ist, setzen wir deshalb das Dreifache des Produkts der Zehner mit 9, oder $3.20.9 = 540$; dann das Quadrat von 9 oder 81, und multipliciren dann die Summe von 1821 mit 9. Wäre 9 die Ziffer der Einer, so müßte das Produkt dem Reste gleich sein, da man nämlich die drei Bestandtheile des Restes gebildet hat. Dies Produkt übertrifft aber 13952, die Einer sind demnach < 9. Man unterwirft nun 8 derselben Probe, und findet hierbei genau 13952, wodurch man 28 als vollständige Cubikzahl von 21952 erkennt. Diese Art zu schließen ist der ähnlich, welche wir bei der Division und Quadratwurzel (§§. 18 und 62) angewandt haben. Leicht läßt sich hieraus die Regel entnehmen, die man bei derlei Rechnungen zu beobachten hat.

21 9 52	28 Wurzel.	
8	12	12
13 9.52	54	48
13 9.52	81	64
0	1821	1744
	9	8
	16389	13952

Zweiter Fall. Hat die Wurzel mehr als zwei Ziffern, wie z. B. die Zahl 12305472001, so wendet man dieselbe Schlußweise wie früher an (§. 62). Man findet folgende Regeln:

1) Man theilt die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von

je 3 Ziffern, wobei die letzte Klasse wohl auch zwei oder eine Stelle haben kann.

2) Zieht aus der letzten Klasse 12 die Cubikwurzel, welche 2 ist; es ist die Ziffer der Tausende der Wurzel. Man zieht von 12 den Cubus 8 der Tausende ab, der Rest ist 4.

3) Nimmt zu diesem Reste 4 die nächstfolgende Klasse herunter, sondert die zwei letzten Ziffern 05 ab und theilt 43 durch 12, das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Ziffer. Die Zuläßigkeit des Quotienten 3 muß, nach dem Gesagten, ausgemittelt werden. Man erkennt hier seine Richtigkeit; der Rest ist 138.

4) Zu diesem Reste setzt man die Klasse 472 herunter, sondert 72 ab, dividirt 1384 durch 1587, das dreifache Quadrat von 23; und schreibt in die Wurzel den Quotienten 0.

5) Nimmt zu diesem Reste die Klasse 001, dividirt 1384720 durch 158700.

Und so weiter fort. Hiernach steht die Rechnung:

	12.3 05.4 72.001	2308 Wurzel	
	4 3.05	12	15 870 0
	4 1 67	18	55 20
	1 38 4.72	9	64
	1 38 4 72 0.01	1389	15 925 264
	1 27 4 02 1 12	3	8
Rest....	11 0 69 8 89	4167	127 402 112

§. 69. Folgende Sätze werden ähnlicherweise wie die in §. 63 erwiesen:

1) Hat eine ganze Zahl, wie z. B. 3, keine ganzzahlige Cubikwurzel, so läßt sich solche nicht genau angeben, man kann ihrem Werthe aber so nahe kommen, als man nur immer will. Um $\sqrt[3]{3}$ bis auf $\frac{1}{4}$ genau zu erhalten, multiplicirt man 3 mit dem Cubus von 4, man hat 3×64 oder 192, deren Cubikwurzel blos als ganze Zahl 5 ist; also $\frac{5}{4}$ die verlangte Zahl, und $\sqrt[3]{3}$ fällt zwischen $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{4}$. Um desgleichen $\sqrt[3]{3\frac{5}{7}}$ bis auf $\frac{1}{11}$ genau zu finden, hat man $3\frac{5}{7} \times 11^3 = 4943\frac{5}{7}$, die Cubikwurzel ist 17, folglich $\frac{17}{11}$ bis auf $\frac{1}{11}$ genau $= \sqrt[3]{3\frac{5}{7}}$.

2) Will man mittelst Decimalziffern die Annäherung bewerkstelligen, so rückt man das Komma um dreimal so viel Stellen nach der Rechten, als Decimalziffern verlangt werden; man hängt deshalb

nöthigenfalls die erforderliche Anzahl von Nullen an. Um $\sqrt[3]{0,3}$ bis auf $\frac{1}{100}$ zu heben, nimmt man $\sqrt[3]{300000}$, welche 67 ist, woraus $\sqrt[3]{0,3} = 0,67$. Ebenso findet man $\sqrt[3]{5,7}$ bis auf $\frac{1}{10}$ genau, wenn man nimmt $\sqrt[3]{5700}$, was 18 gibt, woraus $1,8 = \sqrt[3]{5,7}$. Endlich ist $\sqrt[3]{3,2178}$ bis auf $\frac{1}{10}$ genau $= \frac{1}{10}\sqrt[3]{3217} = 1,5$.

3) Ist die vorgelegte eine ganze Zahl, so reicht es hin, dem jedesmaligen Reste eine Klasse mit 3 Nullen anzusetzen, bis man die gewünschte Anzahl von Decimalstellen gefunden hat.

Hier steht die Rechnung für $\sqrt[3]{477}$:

477	7,81339	
343	147	18252
1340.00	168	234
1315 52	64	1
24 480.00	16444	1827541
18 275 41	8	1
6 204 590.00		
ꝛc.		

Man findet $\sqrt[3]{2} = 1,259921$; $\sqrt[3]{3} = 1,442249$.

4) Die Cubikwurzel eines Bruches findet man dadurch, daß man sie aus dem Zähler und dem Nenner zieht: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$. Sind die beiden Glieder des Bruches keine vollständigen Cubikzahlen, so beweist man, wie in §. 69, daß die Wurzel irrational ist und nur näherungsweise gefunden werden kann. Ist der Grad der Annäherung im voraus bestimmt, so verfährt man wie es in 1^0 angegeben ist: $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$ bis auf $\frac{1}{3}$ genau $= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{5} \times 27} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{10\frac{4}{5}}$, einem Werthe, der zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 liegt, welches die verlangten Resultate sind.

Soll die Annäherung unbestimmt bleiben, so macht man den Nenner zu einem vollständigen Cubus und sucht einen Näherungswerth für die Wurzel des Zählers. Für $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ nimmt man $\frac{1}{7}\sqrt[3]{(5\times49)} = \frac{1}{7}\sqrt[3]{245} = \frac{1}{7} \times 6,2573 = 0,8939$. Eben so $\sqrt[3]{17\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{477} = \frac{1}{3}\times 7,81339 = 2,604463$. Wir sagen nichts über die Ausziehung der vierten, fünften.... Wurzel, für welche man ähnliche Methoden auffinden könnte. Wir wollen nur nach dem, was wir in §. 60 gesagt,

noch bemerken, daß die höhere Wurzel in successive Wurzeln von niedern Graden zerlegt werden kann, sobald der Grad jener Wurzel das Produkt mehrerer Factoren ist. Aus $12 = 2 \times 2 \times 3$ folgert man hiernach, daß die zwölfte Wurzel auf zwei Quadratwurzeln und eine Cubikwurzel reducirt werde. Für $\sqrt[12]{244140625}$ nimmt man zuvörderst die dritte Wurzel, welche 625 ist, darauf die $\sqrt{625}$, welche 25 ist, endlich $\sqrt{25}=5$, als gesuchte zwölfte Wurzel. Die Wurzelausziehung ist eine sehr weitläufige Operation; durch die schönen Eigenschaften der Logarithmen wird sie aber bedeutend erleichtert. (Man sehe §. 87.)

Anmerkungen:

1) Die Cubikwurzel einer Zahl hat eben so viel Ziffern, als die Zahl Klassen enthält.

2) Es ist $19 = 18 + 1$; also $19^3 = 18^3 + 3.18^2.1 + 3.18.1^2 + 1 = 18^3 + 3.18\ (18+1) + 1 = 18^3 + 3.18.19 + 1$; d. h. um den Cubus einer ganzen Zahl aus dem der nächstvorhergehenden ganzen Zahl zu finden, muß man zu dem Cubus dieser letztern 1 mehr als das dreifache Produkt dieser Zahl, multiplicirt mit der nächstfolgenden, addiren. Hieraus ist ersichtlich, daß der letzte Rest nicht größer als das dreifache Produkt der gefundenen Wurzel, multiplicirt mit der um 1 vergrößerten Wurzel sein darf.

3) Die Anzahl der Decimalziffern eines Cubus ist immer dreimal so groß als die der Wurzel. Ist die Anzahl der Decimalstellen einer Zahl durch 3 nicht theilbar, so muß man eine oder zwei Nullen noch anhängen, oder eine oder zwei Decimalstellen weglassen, wenn die vorige Bedingung erfüllt werden soll.

4) Die einfachste Methode, aus einem gewöhnlichen Bruche die Wurzel zu ziehen, ist wohl die, nach der man ihn zuvörderst in einen Decimalbruch verwandelt und aus diesem dann die Wurzel zieht.

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnissen.

Von den Aequidifferenzen und Proportionen.

§. 70. Man vergleicht die Größen unter zweierlei Gesichtspunkten mit einander, indem man entweder ermittelt, um wie viel die eine größer als die andere ist, oder untersucht, wie viel mal die eine die andere enthält. Das Resultat dieser Vergleichung findet man im ersten Falle durch eine Subtraction, im zweiten durch eine Division. Man nennt **Verhältniß** zweier Zahlen den Quotienten, welchen man bei der Division der einen durch die andere erhält. So ist 3 das Verhältniß von 12 zu 4, weil 3 der Quotient von 12:4 ist. Man könnte auch sagen, das Verhältniß von 12 zu 4 ist $\frac{4}{12}$ oder $\frac{1}{3}$; denn es ist einerlei, ob man spricht, die erste Zahl ist dreimal so groß als die zweite, oder diese ist ein Drittel der andern. Wir wollen in der Folge die erst ausgesprochene Zahl durch die zweite dividirt annehmen.

Das erste Glied eines Verhältnisses heißt das Vorderglied, das zweite das Hinterglied.

Wir wissen, daß die Differenz zweier Zahlen dieselbe bleibt (§. 4), wenn man beide um dieselbe Größe vermehrt oder vermindert; desgleichen, daß ein Verhältniß nicht geändert wird (§. 15), wenn man seine beiden Glieder mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt:

$$12 - 5 = 13 - 6 = 11 - 4;\ \frac{42}{12} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

Nicht schwierig ist's, mit dem Verhältnisse irrationaler Größen einen klaren Begriff zu verknüpfen, die in der Rechnung nur als Stellvertreter ihrer genäherten Werthe erscheinen (§. 68). Uebrigens kann ein solches Verhältniß zuweilen commensurabel sein; z. B. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = \frac{2}{1}$.

§. 71. Ist die Differenz zweier Zahlen, 10 und 8, dieselbe wie die zweier andern, 7 und 5, so bilden diese vier Zahlen eine **Aequidifferenz**: $10 - 8 = 7 - 5$. Ist das Verhältniß zweier Zahlen dasselbe,

wie das zweier andern, so bilden diese vier Zahlen eine Proportion; sie geht aus der Gleichheit zweier Verhältnisse hervor: 20 und 10, 14 und 7 haben dasselbe Verhältniß 2. Zwischen den Zahlen 20, 10, 14 und 7 besteht demnach eine Proportion, welche man schreibt, wie folgt: 20 : 10 = 14 : 7 oder auch 20 : 10 :: 14 : 7, und spricht dies aus: 20 verhält sich zu 10 wie 14 zu 7.

Man kann sie auch folgendermaßen schreiben: $\frac{20}{10} = \frac{14}{7}$. Wenn wir diese letzte Schreibart vorziehen, was öfters der Fall sein wird: so werden wir die vorige Aussage: 20 ist zu 10 wie 14 zu 7 beibehalten, und nicht sprechen: 20 dividirt durch 10 ist gleich 14 dividirt durch 7, obschon beide Ausdrücke gleichgeltend sind. Die Glieder 20 und 7 heißen die äussern, 10 und 4 die mittlern der Proportion.

Anmerkung. Wenn man zwei Zahlen untersucht, um zu sehen, um wie viel die eine die andere übertreffe, so sagt man auch, man betrachte die Zahlen in ihrem arithmetischen Verhältnisse. Untersucht man sie dagegen durch Division, so sagt man, man betrachte die Zahlen in ihrem geometrischen Verhältnisse. Hiernach heißt die Zusammenstellung zweier gleicher arithmetischen Verhältnisse eine arithmetische Proportion, und die Gleichheit zweier geometrischen Verhältnisse eine geometrische Porportion. Diese Benennung ist in so fern nicht passend, als das arithmetische Verhältniß nicht mehr arithmetisch, als das geometrische Verhältniß ist. Die Differenz eines arithmetischen Verhältnisses heißt auch noch der Exponent des Verhältnisses; desgleichen wird auch der Quotient eines geometrischen Verhältnisses der Exponent desselben genannt. Diese Benennungsart möchte wohl nicht gut gewählt sein.

Sind die beiden mittlern Glieder einander gleich, so heißt die Proportion eine stetige; eine solche ist folgende: 16 : 24 = 24 : 36; die man auch schreibt ÷ 16 : 24 : 36. Das zweite Glied wird die mittlere Proportionale genannt.

Es ist einleuchtend, daß der allgemeinste Begriff, den man über das Maß der Größen aufstellen kann, darin bestehen wird, ihr Verhältniß zur Einheit ihrer Art zu haben. Sagt man von einem Dinge, daß es $= \frac{5}{7}$ oder fünfmal ein Siebentel der Einheit sei: so ist dies so viel gesagt, als das Verhältniß dieser Größe zur Einheit ist dasselbe, wie das von 5 und 7. Eben so mißt man die irrationale Zahl $\sqrt{7}$

(§. 63); ihr Verhältniß nämlich zur Einheit wird durch das zweier Zahlen, wie 13 und 5, ersetzt, welches die ungenaue aber genäherte Proportion $\sqrt{7} : 1 = 13 : 5$ gibt.

§. 72. Sind die Reste zweier Subtractionen $10 - 8$ und $7 - 5$ gleich oder ungleich, so werden sie es auch noch sein, nachdem man ihnen die Summe $8 + 5$ der subtractiven Größen hinzugefügt hat; es gibt uns dies $10 + 5 = 7 + 8$. In einer Aequidifferenz ist folglich die Summe der äussern Glieder gleich der Summe der mittlern; und umgekehrt ist $10 + 5 = 7 + 8$, so hat man die Aequidifferenz $10 - 8 = 7 - 5$. Es ist also sehr leicht, aus drei gegebenen Gliedern einer Aequidifferenz das vierte zu finden. Die drei ersten Glieder seien 10, 8 und 7, man verlangt das vierte Glied x. Da die Unbekannte x, um 10 vermehrt, gleich $8 + 7$ sein soll, so ist (§. 4) $x = 8 + 7 - 10 = 5$; man hat folglich die Aequidifferenz $10 - 8 = 7 - 5$.

Anmerkung. Sollen die beiden mittlern Glieder einer Aequidifferenz gleich sein, oder wie man zu sagen pflegt, soll die mittlere arithmetische Proportionszahl zwischen zwei Zahlen, 8 und 7, gesucht werden: so hat man $x = \frac{8 + 7}{2}$; das Resultat $7\frac{1}{2}$ wird auch das arithmetische Mittel zwischen 8 und 7 genannt. Ueberhaupt nennt man den Quotienten, welchen man bei der Division der Summe mehrerer Zahlen durch die Anzahl der addirten Größen erhält, das arithmetische Mittel zwischen diesen Zahlen. Hiernach ist das arithmetische Mittel von 8, 10, 6 und $4 = \frac{4 + 6 + 8 + 10}{4} = 7$. Das arithmetische Mittel wird angewandt, um einen mittleren Werth von verschiedenen Resultaten, die aus mehreren Beobachtungen entnommen sind, zu erhalten.

Es seien nun die zwei Verhältnisse $\frac{6}{3}$ und $\frac{14}{7}$ gegeben. Um zu sehen, ob sie gleich oder ungleich sind, multiplicirt man sie mit 3×7, dem Produkte der Nenner; man erhält 6×7 einerseits, und 14×3 anderseits. Stehen also 4 Zahlen in Proportion: $6 : 3 = 14 : 7$, so ist das Produkt der äussern Glieder gleich dem der mittlern. Hat man umgekehrt vier Zahlen 6, 3, 14 und 7 so beschaffen, daß die Produkte 6×7 und 3×14 gleich sind, so folgt daraus die Gleichheit ihrer Verhältnisse, oder die Proportion $6 : 3 = 14 : 7$, oder $\frac{6}{3} = \frac{14}{7}$.

Man kann also immer eine Proportion mit den Factoren zweier gleichen Produkte bilden.

1) Das Produkt der mittlern Glieder wird ein Quadrat, wenn sie einander gleich sind. Die mittlere Proportionale zweier Zahlen ist demnach die Quadratwurzel ihres Produktes. Zwischen 3 und 12 ist die mittlere Proportionale $\sqrt{(3 \times 12)} = 6$. Hat man umgekehrt $6^2 = 3 \times 12$, so kann man die stetige Proportion ansetzen, $3 : 6 = 6 : 12$, oder $\div 3 : 6 : 12$.

2) In einer Proportion, wie $6 : 3 = 14 : x$ ist ein Glied unbekannt. Da 3 mal 14 gleich 6 mal der Unbekannten gleich sein soll, so ist (§. 5) sie der Quotient von 3×14 dividirt durch 6, oder $\frac{42}{6} = 7$; folglich $6 : 3 = 14 : 7$. Ueberhaupt findet man das eine äussere Glied, wenn man das Produkt der mittlern Glieder durch das andere äussere Glied dividirt. Man erhält das unbekannte mittlere Glied, wenn man das Produkt der äussern Glieder durch das bekannte mittlere Glied dividirt.

3) Man kann, ohne die Proportion zu stören, mit ihren Gliedern alle Veränderungen vornehmen, wenn nur in der Anordnung das Produkt der äussern Glieder gleich dem mittlern ist.

In der Proportion $6 : 3 = 14 : 7$, welche $6 \times 7 = 3 \times 14$ gibt, kann man

I. Die äussern Glieder mit einander, oder die mittlern mit einander verwechseln also

$$6 : 14 = 3 : 7$$
$$\text{oder } 7 : 3 = 14 : 6.$$
$$\text{oder } 7 : 14 = 3 : 6.$$

II. Die äussern Glieder an die Stelle der mittlern setzen:

$$3 : 6 = 7 : 14.$$

III. Die beiden Vorderglieder oder die beiden Hinterglieder mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren.

Anmerkungen:

Jede Proportion, deren Glieder gebrochene Zahlen sind, kann also dergestalt umgeändert werden, daß sämmtliche Glieder als ganze Zahlen erscheinen.

Eine Proportion läßt sich immer durch kleinere Zahlen ausdrücken, wenn man die einem äussern und einem mittlern Gliede gemeinsamen Factoren wegstreicht.

§. 73. Wendet man den Satz des §. 38. auf die Proportion 30 : 6 = 15 : 3 oder $\frac{30}{6} = \frac{15}{3}$ an, so findet man $\frac{30 \pm 15}{6 \pm 3} = \frac{15}{3}$ und $\frac{30 + 15}{6 + 3} = \frac{30 - 15}{6 - 3}$.
Bildet man das Produkt der äussern und das der mittlern Glieder, und läßt die gemeinsamen Produkte auf beiden Seiten weg, so bleiben die Größen 30×3 und 15×6 übrig, die der gegebenen Proportion zu Folge gleich sind. Folglich:

1) verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zu der der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied;
2) desgleichen die Summe der Vorderglieder zu ihrer Differenz, wie die Summe der Hinterglieder zu ihrer Differenz;
3) es sei eine Reihe gleicher Verhältnisse $\frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{30}{15}$ gegeben; man erhält $\frac{6+10+14+30}{3+5+7+15} = \frac{14}{7} = \frac{30}{15}$; folglich verhält sich in einer Reihe von gleichen Verhältnissen die Summe der Vorderglieder zu der der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied;
4) kehrt man die gegebene Proportion um, so hat man 30 : 15 = 6 : 3, woraus $\frac{30 \pm 6}{15 \pm 3} = \frac{6}{3}$.

§. 74. Man kann die gleichliegenden Glieder zweier Proportionen mit einander multipliciren. In der That geben 30 : 15 = 6 : 3 und 2 : 3 = 4 : 6 die Brüche $\frac{30}{15} = \frac{6}{3}$ und $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; woraus man durch Multiplication findet: $30 \times 2 : 15 \times 3 = 6 \times 4 : 3 \times 6$.

Man kann also die Glieder einer Proportion aufs Quadrat, auf den Cubus ꝛc. erheben; folglich daraus auch die Quadrat- und Cubikwurzel ziehen.

Von der Regel de Tri.

§. 75. Können die Elemente einer Aufgabe eine Proportion bilden, in welcher die Unbekannte das letzte Glied ist, so gibt eine leichte Rechnung (§. 72) den Werth dieses Gliedes; man nennt dieß Verfahren die Regel de Tri. 30 Arbeiter haben eine Arbeit von 20 Meter gemacht; es fragt sich, wie viel deren 21 Arbeiter in derselben Zeit zu Stande bringen werden. Setzen wir für einen Augenblick voraus, daß die Bedingungen dieser Aufgabe durch die Proportion 30 : 20 =

21 : x ausgesprochen werde, in der x die verlangte Anzahl von Meter darstellt, so finden wir hieraus die Unbekannte $x = \frac{20 \times 21}{30} = 14.$

Will man mit Hülfe der Regel de Tri eine vorgelegte Aufgabe lösen, so ist's vor allen Dingen nöthig, zu untersuchen, ob die Auflösung von einer Proportion abhängen könne; die einzige Schwierigkeit besteht hernach darin, die in der Aufgabe enthaltenen Zahlen in die ihnen zukommenden Stellen in der Proportion anzusetzen.

Von der Regel de Tri kann die Auflösung einer Aufgabe abhängig gemacht werden, in so fern ihr Ausdruck aus zwei Sätzen besteht, wobei die Glieder des ersten Satzes bezüglich gleichartig zu denen des zweiten Satzes, d. h. Paar und Paar von einerlei Art sind, und ausserdem diese beiden Glieder durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt werden können, ohne dadurch die Auflösung zu ändern. So sind in unserm Beispiele 30 Arbeiter und 21 Arbeiter gleichartig, und man könnte diese beiden Zahlen mit 4 oder 3... multipliciren, ohne etwas daran zu ändern. Hieße es 60 Arbeiter haben 20 Meter gemacht; wie viel machen deren 42 Arbeiter? so würde diese Aufgabe mit der erstern offenbar einerlei Auflösung geben.

Die Zeit aber, welche ein Stein zu seinem Falle braucht, ist nicht doppelt, wenn die Höhe doppelt wird; ein Faß braucht zur Ausleerung nicht die dreifache Zeit, wenn sein Rauminhalt dreimal größer wird; diese Elemente lassen sich nicht in eine Proportion bringen.

§. 76. Hat man die Möglichkeit der Auflösung mittelst einer Proportion eingesehen, so handelt sich's darum, jedem Gliede die gehörige Stelle zu geben. Das vierte und dritte Glied mögen die Unbekannte und ihre gleichartige Größe ausmachen, welche mit ihr *allein* nur verglichen werden kann. Das zweite Verhältniß ist sonach bestimmt; die Bildung des erstern ist jetzt noch übrig, das aus den andern in der Aufgabe enthaltenen und unter sich gleichartigen Zahlen besteht. Da nun die Natur der Aufgabe angibt, welches von den beiden schon hingeschriebenen Gliedern das größere sei, die Unbekannte oder die ihr gleichartige Größe, und die Vorderglieder beide gleichzeitig größer oder kleiner als die Hinterglieder sind: so ist's leicht zu entscheiden, welches von den beiden noch hinzusetzenden Gliedern die erste oder zweite Stelle erhält. In der vorhergehenden Aufgabe sieht man, nachdem 20 Meter : x Meter hingeschrieben ist, daß 21 Arbeiter weniger Arbeit als 30 machen, also $x < 20$ ist; folglich muß von den beiden

noch anzusetzenden Zahlen 30 und 21, die Zahl 30 die erste Stelle einnehmen; man hat also $30 : 21 = 20 : x$.

Die beiden folgenden Beispiele werden dies noch mehr erläutern:

57 Arbeiter machen in 5 Tagen eine gewisse Arbeit; wie viel Tage brauchen 19 Arbeiter zu derselben Arbeit?

Nähme man 2 oder 3 mal mehr Tage, so brauchte man eben so viel mal weniger Arbeiter; die Aufgabe hängt hiernach von den Proportionen ab. Man setzt zuvörderst 5 Tage : x Tage; und da 19 Arbeiter mehr Tage als 57 zur Verfertigung derselben Arbeit brauchen, so ist das Hinterglied $x >$ als 5; 57 ist also das Hinterglied des ersten Verhältnisses, und man hat

$$19 \text{ Arbeiter} : 57 \text{ Arb.} = 5 \text{ Tage} : x \text{ Tage}; \; x = \frac{5 \cdot 57}{19} = 15 \text{ Tage}.$$

Zur Bekleidung eines Hausgeräthes sind 6 Ellen Zeug erforderlich, das $\frac{3}{4}$ Ellen breit ist; wie viel Ellen braucht man von einem Zeug dazu, das $\frac{2}{3}$ Ellen breit ist? Obgleich hier die vier Glieder lauter Ellen sind, so sieht man doch bald, daß die einen Längen, die andern Breiten ausdrücken, und daß 6 Ellen und die Unbekannte die beiden gleichartigen sind. Die Proportion ist also durch 6 Meter : x Meter geschlossen. Nun braucht man weniger Ellen der Länge nach von dem Zeuge, welches das breitere ist; daher $x > 6$, weil $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Folglich $\frac{2}{3}$ das Vorderglied des ersten Verhältnisses, und die Proportion $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = 6 : x$, woraus $x = 6 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = 6\frac{3}{4}$.

§. 77. Wiewohl es immer sehr leicht ist, eine solche Untersuchung anzustellen, so vermeidet man sie, um die Rechnung zu beschleunigen. Man unterscheidet zwei Arten von Verhältnissen: das gerade oder direkte Verhältniß, wo mit dem Wachsen oder Abnehmen einer Zahl ein gleichvielfaches Wachsen oder Abnehmen der andern Zahl verbunden ist, und das umgekehrte oder indirecte Verhältniß, wo mit dem Wachsen einer Zahl ein gleich vielfaches Abnehmen der andern Zahl verbunden ist. Die 30 Arbeiter und 20 Meter der ersten Aufgabe stehen im geraden Verhältniß, weil desto mehr Arbeit gemacht wird, je mehr Arbeiter vorhanden sind. In der zweiten Aufgabe dagegen stehen 57 Arbeiter und 5 Tage im umgekehrten Verhältniß, weil desto weniger Zeit erforderlich ist, je mehr Arbeiter man zur Verfertigung einer Arbeit verwenden kann.

Stehen die Größen bei einer Aufgabe in geradem Verhältniß, und folgen die gleichartigen Glieder in beiden Sätzen der Rede in

derselben Ordnung auf einander, so behalten diese Glieder ihre Stellen in der Proportion bei. In dem Beispiele: 30 Arbeiter haben eine Arbeit von 20 Meter gemacht, wie viel machen deren 21 Arbeiter? setzt man hiernach $30 : 20 = 21 : x$. Hieße es dagegen: 20 Meter sind durch 30 Arbeiter gefertigt worden; wie viel machen davon 21 Arbeiter? so erscheinen die gleichartigen Glieder nicht mehr in der verlangten Ordnung; diejenigen Stellen, welche sie in der Proportion haben sollen, nehmen sie erst dann wieder ein, wenn man die Aufgabe so stellt, daß die gleichartigen Glieder in beiden Theilen der Rede in derselben Ordnung auf einander folgen.

Hat die Aufgabe umgekehrte Verhältnisse, so müssen die Glieder bei der Proportion in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, dergestalt, daß die letzte der ausgesprochenen Zahlen zuerst, dann die vorletzte ꝛc., geschrieben wird; die Unbekannte ist stets in der vierten Stelle angenommen.

Eine Person legt in 8 Tagen eine Reise zurück, indem sie täglich 7 Stunden geht; in wie viel Zeit würde sie diese Reise machen, wenn sie täglich 10 Stunden ginge? Umgekehrte Regeldetri, weil man weniger Tage zur Zurücklegung derselben Entfernung braucht, je mehr Stunden man täglich geht; also: $10 : 7 = 8 : x = 5\frac{3}{5}$.

Anmerkung. Alle diese Aufgaben können, ohne eine Proportion anzuwenden, gelöst werden, indem eines der beiden Glieder im ersten Satze der Aussage auf die Einheit reducirt wird, was dadurch geschieht, daß man die beiden Glieder dieses Satzes mit einander multiplicirt, wenn sie im umgekehrten Verhältnisse stehen, und eins durch das andere dividirt, wenn dies Verhältniß gerade ist.

Erster Fall. (Gerade Regeldetri.) Man dividirt das eine Glied des ersten Satzes durch das andere, und ersetzt so das letztere durch 1. In der ersten Aufgabe, wo 30 Arbeiter 20 Meter machen u. s. w., sagt man: Da weniger Arbeiter weniger Arbeit machen, so wird ein Arbeiter $\frac{20}{30}$ Meter machen; 21 Arbeiter offenbar 21 mal mehr, also $x = \frac{20}{30} \times 21 = 14$.

Zweiter Fall. (Umgekehrte Regeldetri.) Man multiplicirt die beiden Glieder des ersten Satzes mit einander und ersetzt so das eine von ihnen durch 1. In der zweiten Aufgabe, wo 57 Arbeiter 5 Tage brauchen u. s. w., sagt man: weil desto mehr Tage zur Vollendung einer Arbeit erforderlich sind, je

weniger Arbeiter da sind, so wird ein Arbeiter 57 mal mehr Zeit, also 57×5 Tage brauchen; 19 Arbeiter dagegen 19 mal weniger als 1 Arbeiter, also $x = \frac{57 \times 5}{19} = 15$ Tage.

In allen Fällen ist das in dem ersten Satze enthaltene, auf die Einheit reducirte Glied gleichartig oder von einerlei Art zu dem gegebenen Gliede des zweiten Satzes. Man thut sehr wohl daran, in dergleichen Schlußarten sich zu üben, und die im Text gegebenen Aufgaben nach diesem Verfahren zu lösen. Eine große Anzahl von Anwendungen dieser Regel, so wie überhaupt aller arithmetischen Operationen, findet man in der Aufgaben-Sammlung von Grémilliet; sehr nützlich ist dies schätzbare Werk jungen Leuten, die sich überhaupt in numerischen Rechnungen üben wollen.

Das letztgenannte Werk ist aus dem Französischen ins Deutsche durch Dryhle übertragen worden. Die arithmetischen Unterhaltungen von Unger sind in dieser Beziehung gleichfalls empfehlenswerth. Hieher gehören auch Lautenschlägers Rechnungsaufgaben, so wie die dem Handbuche der Arithmetik von Unger beigegebene Sammlung von Rechnungs-Aufgaben.

Die Anwendung der Proportion, auf die manche noch ein großes Gewicht legen, ist nie durchaus nöthig; sie kann in der That als eine veraltete Lehre angesehen werden.

Bemerkt mag noch werden, daß die Unbekannte nicht nothwendig das vierte Glied der Proportion zu sein braucht; ihre Stellung ist vielmehr in derselben gleichgültig, wesentlich aber ist's, daß die gewählte Darstellung der vier Größen ihrer Abhängigkeit entspreche.

Hier einige Uebungs-Beispiele:

I. 17 Mark 5 Unzen 4 Quentchen kosten 869 Livres 15 Sous 6 Deniers; was kosten 14 Mark 3 Unzen $2\frac{1}{2}$ Quentchen? Gerade Regeldetri; folglich 17 Mark 5 Unzen 4 Quentchen : 869 Liv. 15 S. 6 D. = 14 Mark 3 Unzen $2\frac{1}{2}$ Quent. : x Liv. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht, daß man die beiden Vorderglieder mit 16 multiplicirt; man hat dann 283 M. : 869 Liv. 15 S. 6 Den. = 230 M. 5 U. : x Liv. Man findet $x = 708$ Liv. 16 S. $1\frac{269}{1132}$ Den.

Zweite Auflösung: $17\frac{5}{8} + \frac{4}{8.8}$ M. $= 17\frac{11}{16}$ M. kosten $869 + \frac{15}{20} + \frac{1}{20.2}$ Liv. oder $869\frac{31}{40}$ Liv.; also 1 Mark kostet $\frac{869\frac{31}{40}}{17\frac{11}{16}}$ Liv.; folglich 14 M. 3 Unz.

$2\frac{1}{2}$ Quent. oder $14\frac{53}{128}$ Mark kosten $\frac{869\frac{31}{40}}{17\frac{11}{16}} \times 14\frac{53}{128}$ Liv. $= \frac{34791 \times 16 \times 1845}{40 \times 283 \times 128}$ Liv. $= 708\frac{14583}{18112}$ Liv. $= 708$ Liv. $16\frac{934}{9056}$ S. $= 708$ Liv. 16 S. $1\frac{269}{1132}$ Den.

II. Sechs Schwadronen haben in 54 Tagen einen Futtervorrath aufgezehrt; in wie viel Tagen hätten 9 Schwadronen denselben verzehrt? Umgekehrte Regeldetri: also $9 : 54 = 6 : x = 36$.

Schw.	Tage.
6	54
9	x

Zweite Auflösung: Eine Schwadron würde 54×6 Tage mit dem Vorrath ausreichen, 9 Schwadronen dagegen 9 mal kürzere Zeit, das ist $\frac{54 \times 6}{9} = 36$.

III. Ein Schiff hat noch auf 10 Tage Lebensmittel; man will aber noch 15 Tage auf der See bleiben; auf wie viel muß jede Ration vermindert werden? Hier findet man keine vier Glieder; es ist jedoch einleuchtend, daß das eine dabei gedacht ist, und die Aufgabe eigentlich wie folgt heißen sollte: Die Person enthält die Ration 1, wenn man 10 Tage auf der See bleibt; was bekommt dieselbe, wenn man 15 Tage auf der See bleibt? Umgekehrte Regeldetri; folglich $15 : 10 = 1 : x = \frac{2}{3}$.

Tage.	Ration.
10	1
15	x

Zweite Auflösung: Würde man 1 Tag anstatt 10 Tage auf der See bleiben, so könnte die Person 10 Rationen erhalten; da sie aber 15 Tage mit diesem Vorrath ausreichen soll, so erhält sie für jeden Tag $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ Ration.

IV. Ein Springbrunnen füllt einen gewissen Behälter in 6 Stunden, ein anderer Springbrunnen füllt denselben Behälter in $5\frac{1}{4}$ Stunden, ein dritter endlich ihn in $4\frac{2}{3}$ Stunden; in wie viel Zeit werden diese 3 Springbrunnen, wenn sie zu gleicher Zeit fließen, den Behälter füllen? Suchen wir, welchen Theil des Behälters der erste Springbrunnen in einer Stunde füllt, so erhalten wir $\frac{1}{6}$ als den gesuchten Theil (wenn man will auch aus der Proportion $6 : 1 = 1 : x = \frac{1}{6}$). Ebenso $\frac{4}{21}$ für den Theil des Behälters, welchen der zweite Springbrunnen in einer Stunde füllt (wenn man will aus der Proportion $5\frac{1}{4} : 1 = 1 : x = \frac{4}{21}$). Für den Theil des Behälters, den der dritte Springbrunnen in einer Stunde füllt, findet man $\frac{3}{14}$. (Auch aus der Proportion $4\frac{2}{3} : 1 = 1 : x = \frac{3}{14}$.) Fließen diese drei Springbrunnen zu gleicher Zeit, so werden sie in einer Stunde folgenden Theil des Behälters füllen, nämlich: $\frac{1}{6} + \frac{4}{21} + \frac{3}{14}$ oder $\frac{7}{42} + \frac{8}{42} + \frac{9}{42} = \frac{4}{7}$. Wenn also $\frac{4}{7}$ des

Behälters in einer Stunde gefüllt ist; in wie viel Zeit wird der ganze Behälter angefüllt? Die Auflösung ist $1 : \frac{4}{7}$ oder $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$.

Die Zeit, damit die Behälter durch die drei Springbrunnen gefüllt werde, ist also $1\frac{3}{4}$ Stunden. Allgemein dividirt man die Einheit durch die Summe der Theile des Behälters, welchen jeder Springbrunnen in einer Stunde anfüllt, so erhält man die Zeit, den Behälter zu füllen, wenn sämmtliche Springbrunnen zugleich fließen.

§. 78. Von der zusammengesetzten Regeldetri. Auf die Proportionen werden öfters Aufgaben zurückgeführt, welche mehr als drei gegebene Glieder enthalten. Solche Aufgaben bestehen aus zwei Sätzen, welche paarweise gleichartige und proportionirt veränderliche Zahlen enthalten. Hierüber folgendes Beispiel: 20 Arbeiter machen eine Arbeit von 160 Meter in 15 Tagen; wie viel Meter bringen 30 Arbeiter in 12 Tagen fertig?

Arbeiter.	Meter.	Tage.
20	160	15
30	x	12

Es bieten sich zwei Fälle dar, je nachdem nämlich die der Unbekannten nicht entsprechenden Glieder in geradem oder ungekehrtem Verhältniß stehen. Hier sind 20 Arbeiter und 15 Tage in umgekehrten Verhältniß; denn je mehr Arbeiter man anwendet, desto weniger Zeit braucht man, sie zu beschäftigen, um eine und dieselbe Arbeit zu verrichten. Man kann demnach, ohne die Aufgabe zu ändern, eine der Zahlen verdoppeln, verdreifachen...... in so fern man die andern durch 2, 3.... dividirt. Multipliciren wir 20 Arbeiter mit 15, und dividiren 15 Tage durch 15: so bekommen wir 300 Arbeiter und 1 Tag. Multipliciren wir ebenso 30 Arbeiter mit 12, und dividiren 12 Tage durch 12; so haben wir 360 Arbeiter und 1 Tag. Die Aufgabe heißt dann, 300 Arbeiter machen 160 Meter in einem Tage, wie viel machen 360 Arbeiter in einem Tage? Die Zeit ist jetzt auf beiden Seiten dieselbe, unnöthig ists daher, solche in Betracht zu nehmen, und man hat eine gerade Regeldetri: $300 : 160 = 360 : x = 192$ Meter.

Anmerkung. Die Reduction der beiden Zahlen der Tage auf die Gleichheit ist's, welche man hauptsächlich im Auge haben muß. Man hätte daher eben so gut 20 mit 5 multipliciren, und 15 durch 5 dividiren, oder auch 30 mit 4 multipliciren und 12 durch 4 dividiren können; der eine und der andere Fall würde die Zahlen der Tage auf 3 gebracht haben.

Ist das Verhältniß gerade, so verfährt man auf andere Weise.

Arbeiter.	Meter.	Tage.
20	160	15
30	192	x

Z. B. 20 Arbeiter machen 160 Meter in 15 Tagen, wie viel Tage werden 30 Arbeiter brauchen, um 192 Meter zu machen? Je mehr Arbeiter vorhanden sind, desto mehr Arbeit werden sie verrichten; 20 Arbeiter und 160 Meter stehen in geradem Verhältniß. Multiplicirt man also eine dieser Größen mit 2, 3...., so muß man auch die andere mit derselben Zahl multipliciren. Wir nehmen 192 als Factor von 20 Arbeiter und von 160 Meter, und 160 als Factor von 30 Arbeiter und von 192 Meter; es ist klar, daß auf diese Weise die Anzahl der Meter, in beiden Fällen, 192×160 sein wird. Man hat dann folgende Aufgabe: 20×192 Arbeiter machen eine Arbeit in 15 Tagen; wie viel Tage brauchen 30×160 Arbeiter, um dieselbe Arbeit zu Stande zu bringen? Diese Aufgabe gibt eine umgekehrte Regeldetri, folglich $30 \times 160 : 15 = 20 \times 192 : x$; woraus

$$x = \frac{20 \cdot 192 \cdot 15}{30 \cdot 160} = 12.$$

Anmerkung. Man hätte den nämlichen Zweck mit einem einfacheren Factor als 192 erreicht. Man sehe deshalb das, was über die Reduktion auf einen gemeinschaftlichen Nenner (§. 38) gesetzt ist, nach. Hier wurde 192 nur genommen, um die daraus zu ziehende Folgerung besser einsehen zu können.

Man wird in jedem andern Fall auf ähnliche Weise verfahren. Die zweite Aufgabe kann als Probe für die Richtigkeit der Rechnung der ersten Aufgabe dienen. Ueberhaupt kann die Umstellung der Aufgabe, wobei ein anderes Glied als unbekannt angenommen und solches dann berechnet wird, als Probe dergleichen Rechnungen dienen.

Hier noch ein zweites Beispiel, das ziemlich verwickelt scheint. 40 Arbeiter, die täglich 7 Stunden arbeiten, haben in 8 Tagen eine Arbeit von 300 Meter gemacht; wie viel Tage werden 51 Arbeiter, die täglich 6 Stunden arbeiten, brauchen, um eine Arbeit von 459 Meter zu machen.

Arbeiter.	Meter.	Tage.	Stunden.
40	300	8	7
51	459	x	6

Da die Arbeiter und die Stunden in umgekehrtem Verhältniß stehen, so setzt man 40×7 Arbeiter einerseits, und 51×6 Arbeiter anderseits für eine Stunde Arbeit täglich. Es gibt dies zur hier unten stehenden Aufgabe Anlaß, die weiter in Worten auszudrücken unnöthig ist:

40×7 Arbeiter 300 Meter 8 Tage.
51×6 Arbeiter 459 Meter x Tage.

Die Arbeiter und die Meter stehen im geraden Verhältniß; man macht daher 459 zum Multiplicator der Glieder des ersten Satzes, und 300 zum Multiplicator der des zweiten Satzes: die Zahl der Meter wird sonach dieselbe auf beiden Seiten; und man hat eine umgekehrte Regeldetri, deren Ansatz ist $51 \times 6 \times 300 : 8 = 40 \times 7 \times 459 : x$; woraus $x = \frac{40 \cdot 7 \cdot 459 \cdot 8}{51 \cdot 6 \cdot 300} = \frac{4 \times 7 \times 4}{10} = 11{,}2$.

Arbeiter.	Tage.
$40 \times 7 \times 459$	8
$51 \times 6 \times 300$	x

Man kann auch diese verschiedenen Schlußfolgerungen umgehen. Bringt man sie nämlich bei jedem Gliede, in Vergleich zur Unbekannten von Neuem in Anwendung, so sieht man, daß das Glied und das zugehörige gleichartige die Stellen wechseln, wenn das Verhältniß gerade ist; daß sie hingegen ihre Stellen beibehalten, wenn das Verhältniß umgekehrt ist. Endlich werden sämmtliche in jeder Linie enthaltenen Zahlen mit einander multiplicirt, und die Produkte unter einander gleich gesetzt. So stehen, in der letzten Aufgabe, die Arbeiter und Tage, desgleichen die Stunden und Tage im umgekehrten Verhältniß; während die Meter und Tage ein gerades Verhältniß liefern.

$$40 \times 459 \times 8 \times 7$$
$$51 \times 300 \times x \times 6.$$

Man verwechselt demnach nur 300 und 459 mit einander; bildet das Produkt der in jeder Linie enthaltenen Zahlen, und erhält durch Gleichsetzung der Produkte: $40 \times 459 \times 8 \times 7 = 51 \times 300 \times 6 \times x$, was den nämlichen Werth wie oben gibt. Die Unbekannte ist der Quotient von $40 \times 459 \times 8 \times 7$ dividirt durch $51 \times 300 \times 6$ (§. 5). Diese Operation findet auch bei der einfachen Regeldetri ihre Anwendung.

Anmerkung. Diese und ähnliche Aufgaben kann man auch durch folgende Schlußart, ohne Hülfe der Proportion, lösen: Der leichtern Uebersicht wegen schreibt man die Zahlen des ersten Satzes in eine Linie, die Zahlen des zweiten Satzes in eine andere Linie, so daß jedesmal zwei gleichnamige Größen untereinander stehen. Diese Vorschrift gibt für das gewählte Beispiel folgende Darstellung:

Bedingungssatz.	40 Arbeiter,	300 Meter,	8 Tage,	7 Stunden,
Fragesatz.	51 „	459 „	x „	6 „

Man urtheilt nun so: Um 300 Meter zu machen braucht ein Arbeiter, wenn er täglich 7 Stunden arbeitet. . 8×40 Tage,

51 Arbeiter brauchen zu derselben Arbeit, unter der Voraussetzung, daß sie täglich 7 Stunden arbeiten . . . . $8 \times \frac{40}{51}$ „

Zu dieser Arbeit brauchen die 51 Arbeiter, wenn sie eine Stunde nur täglich arbeiten . . . . $8 \times \frac{40}{51} \times 7$ „

Dagegen wenn sie 6 Stunden täglich arbeiten . $8 \times \frac{40}{51} \times \frac{7}{6}$ „

Die 51 Arbeiter verfertigen so 300 Meter; zu einem Meter brauchen sie daher nur . . . . $8 \times \frac{40}{51} \times \frac{7}{6} \times \frac{1}{300}$ „

Zur Verfertigung von 459 Meter brauchen sie also . . . . $8 \times \frac{40}{51} \times \frac{7}{6} \times \frac{459}{300}$ „

Dieß ist also die verlangte Anzahl von Tagen, welche aus sämmtlichen in der Aufgabe enthaltenen Umständen hervorgeht. Die gesuchte Zahl wird also gefunden, wenn man die ihr gegebene gleichartige mit dem Produkte aus allen geraden und allen ungeraden Verhältnissen multiplicirt, welche aus der Vergleichung der auf jeden Umstand der Aufgabe Bezug habenden Größen hervorgehen. — Finden sich in dem so erhaltenen Ausdrucke oben und unten gemeinschaftliche Factoren, so hebe man sie gegen einander auf, um die Rechnung abzukürzen.

§. 79. **Von der Gesellschaftsrechnung (Theilregel).** Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt eine Person 12000 fl., eine zweite 8000 fl., eine dritte 4000 fl. Sie gewinnen zusammen 5430 fl.; dieser Gewinn soll nach Verhältniß ihrer Einlagen vertheilt werden.

Die ganze Summe 24000 fl. hat eingebracht 5430 fl. Man hat daher folgende drei Proportionen:

$$24000 : 5430 = 12000 : x = 2715 \text{ fl.};$$
$$24000 : 5430 = 8000 : x = 1810 \text{ fl.};$$
$$24000 : 5430 = 4000 : x = 905 \text{ fl.}$$

Man sieht, daß die ganze Einlage sich zum ganzen Gewinne verhält, wie jede einzelne Einlage zu dem ihr entsprechenden Gewinne. Die Summe aller Gewinn-Antheile muß den gesammten Gewinn 5430 wieder hervorbringen.

Anmerkung. Auflösung ohne Proportion: Mit 24000 fl. wur-

den 5430 fl. gewonnen, mit 1 fl. also $\frac{5430}{24000}$ fl.; mit 12000 fl. daher $\frac{5430}{24000} \times 12000$ fl. rc.

Es sei noch folgendes Beispiel gegeben: Drei Kaufleute legen in eine Handlung: der erste 10000 fl. auf 7 Monat, der zweite 8000 fl. auf 5 Monate, der dritte 4000 fl. auf 20 Monate. Sie gewinnen zusammen 1500 fl.; wie viel gebührt jedem davon?

Man bemerke, daß die Einlagen und Zeiten in umgekehrtem Verhältniß stehen; werden sie daher respective multiplicirt, so erhält man eine einfache Gesellschaftsrechnung. Man kann sonach annehmen, daß der erste Kaufmann 70000 fl., der zweite 40000 fl., der dritte 80000 fl. für gleiche Zeiträume eingelegt habe. Nach der vorigen Regel findet man die respectiven Gewinne 552,63 fl., 315,79 fl., 631,58 fl.

Suchte man zuvörderst den Gewinn, welchen ein Beitrag von 100 fl. einbrächte, so könnte man für jede Einlage die Proportion ansetzen: wenn 100 fl. Einlage einen gewissen Gewinn geben, welches ist der einer bestimmten Einlage nach Verhältniß zukommende Gewinn? Das erste Glied oder der Divisor in dieser geraden Regeldetri ist 100. Derlei Proportionen sind sämmtlich leichter aufzulösen, was besonders bei einer großen Anzahl von Theilnehmern nützlich ist, da man eben so viele Regeldetriansätze hat, so viele verschiedene Antheile vorkommen.

§. 80. Die Interessenrechnung hat zum Zweck, die Entschädigungssumme für die unter gewissen Bedingungen geliehene Geldsumme zu finden. Die Interessen oder Zinsen werden auf zwei Arten festgestellt: entweder dadurch, daß man die Zinsen angibt, welche ein Kapital von 100 fl. einträgt, woher der Ausdruck Procent entstanden ist (5 Procent schreibt man auch 5 p. %); oder dadurch, daß man die Summe bestimmt, welche einen Gulden Zins bringen soll. Ist der Denier (pro Eins Zins, wenn man will) = 14, so heißt dieß, daß die Zinsen von 14 fl. Kapital 1 fl. betragen.

Anmerkung. Für Procente hat man noch den Ausdruck Zinsfuß. Die Zinsen hängen, ausser von der Größe des Kapitals, auch von der Länge der Zeit ab; gewöhnlich wird das Jahr als Zeiteinheit hierbei angenommen.

Die Abhängigkeit, in der diese beiden Arten, die Zinsen festzustellen, zu einander stehen, wird durch eine Proportion dargestellt.

So ist der Denier 25 mit 4 Procent gleichgeltend; denn setzt man folgende Regeldetri an: 25 fl. tragen 1 fl., wie viel Zinsen geben 100 fl.? so findet man 4 fl. Ebenso ist der Denier 20 mit 5 Prozent gleichgeltend.

Um die Interessen von 54000 fl. zu 5 Procent jährlich zu finden, setzt man die Proportion: wenn 100 fl. 5 geben, wie viel geben 54000 fl.? Das vierte Glied ist $540 \times 5 = 2700$ fl. Die Interessen sind bei diesem Zinsfuß der zwanzigste Theil des Kapitals.

Oft nimmt man, anstatt der jährlichen Interessen, die für eine bestimmte Anzahl von Tagen. Im Handel wird hierbei das Jahr zu 360 Tage angenommen, was die Rechnung bedeutend erleichtert. Denn will man z. B. die Interessen von 54000 fl., zu 5 Prozent jährlich, für 210 Tage haben, so setzt man diese zweite Proportion: 360 Tage tragen 2700 fl., wie viel tragen 210 Tage? Das vierte Glied gibt die gesuchten Interessen. Die Rechnung liefert: $x = 54000 \times \frac{5 \cdot 210}{36000} = 1575$.

Hieraus ergibt sich folgende Regel: Um die Interessen eines Kapitals zu erhalten, multiplicire das Kapital, die Zahl der Tage und den Zinsfuß mit einander, und dividire das Produkt durch 36000.

Diese Regel wird noch vereinfacht, wenn man bemerkt, daß sie dahin ausläuft, das Kapital mit zwei Brüchen zu multipliciren, wovon der eine die Zahl der Tage dividirt durch 6000 ist, der andere den sechsten Theil des Zinsfußes macht, was mit Hülfe der aliquoten Theile von 6000 und von 6 leicht (nach §. 42) geschieht. Man setze zuvörderst die Interessen zu 6 Procent voraus, wodurch der zweite Bruch auf 1 reducirt wird; alsdann, die Dauer eines Monats zu 30 Tage angenommen, ist's für 2 Monate oder 60 Tage hinreichend, ein Hundertel vom Kapital zu nehmen, was dadurch geschieht, daß man das Komma um zwei Stellen nach der Linken rückt. Für einen Monat nimmt man nur die Hälfte dieses Resultats, für 10 Tage das Drittel des letztern u. s. w. Wie viel Interessen geben z. B. 5843,24 fl. zu 6 Prozent jährlich vom 5. Februar bis zum 9. September? Zieht man 5 von 9 ab, so hat man 4 Tage; ausserdem hat man noch 7 Zwischenmonate zu 30 Tage; berücksichtigt man aber die Monate mit 28 und die mit 31 Tagen, so muß man noch 2 Tage hinzufügen; man hat so im Ganzen 7 Monate und 6 Tage, oder 216 Tage. Hiernach steht die Rechnung:

Für 6 Monate (3 mal 58,43) . . . . 175,29 fl.
Für 1 Monat (Hälfte von 58,43) . . . . . . 29,22 fl.
Für 6 Tage (Fünftel von 29,22) . . . . 5,84 fl.
Interessen zu 6 p. % . . . . 210,35 fl.

Sind die Interessen aber zu $4\frac{1}{2}$ p. % jährlich zu beziehen, so muß man dies Resultat mit dem sechsten Theil von $4\frac{1}{2} = 2 + 2 + \frac{1}{2}$ multipliciren. Danach steht die Rechnung:

Für $\frac{2}{6}$ (das Drittel von 210,35) . . . . 70,12 fl.
Für $\frac{2}{6}$ (. . . . .) . . . . 70,12 fl.
Für $\frac{1}{12}$ (das Viertel von 70,12) . . . . 17,53 fl.
Interessen zu $4\frac{1}{2}$ p. % . . . . 157,77 fl.

Da das Sechstel von $4\frac{1}{2} = \frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$ ist, so hätte man auch $\frac{3}{4}$ von 210,35 nehmen können.

Auflösung ohne Proportionen: Wie viel Interessen geben 840 fl. in $3\frac{3}{4}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}$ p. %? 100 fl. geben $\frac{9}{2}$ fl. Zinsen; 1 fl. also $\frac{9}{2.100}$ fl., 840 fl. daher $\frac{9.840}{2.100}$ fl. In $3\frac{3}{4}$ Jahren folglich $\frac{9}{2}.\frac{840}{100}.\frac{15}{4}$ fl. = 141 fl. 45 kr.

§. 81. Von der Rabattrechnung. Wird die erst nach einer gewissen Zeit fällige Summe auf der Stelle ausbezahlt, so nennt man die desfalls zu entrichtenden Zinsen den Rabatt. Hat man z. B. 10000 fl. nach 7 Monaten in Empfang zu nehmen, so erhält man jetzt dafür die Summe von 9825 fl, weil die Zinsen in Abzug gebracht werden, die, den Zinsfuß zu $\frac{1}{4}$ p. % monatlich berechnet, 175 fl. betragen. Den auf diese Art berechneten Rabatt nennt man auch Rabatt in Hundert oder Disconto.

Bei dem Rabatt oder Rabatt auf Hundert zieht man nur die Zinsen der baaren Zahlung ab. Man schließt hier so: Auf 100 fl. behält man jeden Monat $\frac{1}{4}$ fl. zurück; nach 7 Monat sind also $100 + \frac{7}{4}$ auf 100 fl. reducirt. Man setzt daher folgende Proportion: Wenn $101\frac{3}{4}$ fl. auf 100 fl. reducirt sind, auf wie viel werden 10000 fl. reducirt? Man findet 9828,01 fl. In der That addirt man zu dieser Summe ihre siebenmonatlichen Zinsen zu $\frac{1}{4}$ p. % monatlich, so findet man wieder 10000 fl.

§. 82. Die Kettenregel (Reductionsrechnung) ersetzt den Gebrauch mehrerer geraden Regeldetrisätze; sie kommt vorzugsweise bei Aufgaben vor, deren Auflösung von verschiedenen Regeldetrisätzen abhängt, solchergestalt, daß sie ein zusammengesetztes Verhältniß geben.

16 englische Fuß machen 15 französische Fuß; wie viel französische Fuß gehen auf 83 englische?

Man hat $16 : 15 = 83 : x = \frac{83 \times 15}{16} = 77{,}81$.

Man kann auch folgende zwei Gleichungen anschreiben:

15 französische Fuß = 16 englische Fuß.

83 englische Fuß = x franz. Fuß.

Wird die erste Gleichung mit 83, und die zweite mit 16 multiplicirt, so kommt 83 × 15 französische Fuß = 83 × 16 englische Fuß,

16 × 83 englische Fuß = 16 × x französische Fuß.

Folglich $83 \times 15 = 16 \times x$; $x = \frac{83 \times 15}{16}$.

Das gemeinschaftliche Produkt 16 × 83 führt zu demselben Werthe wie oben. — Wir nehmen eine verwickeltere Aufgabe vor. Wie viel Meter betragen 27 englische Fuß, wenn 1,3 Meter 4 französische Fuß betragen, wovon 15 auf 16 englische Fuß gehen? Man setzt:

1,3 Meter = 4 französische Fuß,

15 französische Fuß = 16 englische Fuß,

27 englische Fuß = x Meter.

Nach dem Obigen können die zwei ersten Gleichungen durch ihr Produkt ersetzt werden; der erste Theil des Resultats ist dem ersten Gliede, der zweite Theil dem letzten Gliede gleichartig; nämlich:

15 × 1,3 Meter = 4 × 16 englische Fuß,

27 englische Fuß = x Meter.

Wird ein zweites Produkt gebildet, so hat man

27 × 15 × 1,3 Meter = 4 × 16 × x Meter.

Also $526{,}5 = 64 \times x$, woraus, indem man durch 64 dividirt, $x = 8{,}2266\ldots$ M.

Betrachtet man die Ordnung dieser successiven Gleichungen und die Schlußweise näher, die uns veranlaßte, sie mit einander zu multipliciren: so sieht man, daß diese Regel bei jeder beliebigen Anzahl von Gleichungen anwendbar ist. Man ordnet also diese Gleichungen so, daß das zweite Glied einer jeden dem ersten Gliede der folgenden Gleichung gleichartig ist. Der Ansatz ist geschlossen, sobald man zu einem zweiten Gliede gelangt ist, das dem Anfangsgliede gleichartig ist. Das Produkt der ersten Columne wird dem der zweiten Columne gleich gesetzt. Die folgenden Beispiele werden den Gebrauch der Kettenregel zeigen und ihren großen Nutzen einsehen lehren. Es ist immer bequem,

den Ansatz mit dem unbekannten Gliede x zu beginnen. Wie verhält sich der Arpent zum Hektar? Man weiß, daß der Arpent 900 Quadrattoisen enthält; das Verhältniß der Toise zum Meter lehrt, daß die Quadrattoise 3,8 Quadratmeter beträgt. Der Ansatz steht daher:

x Arpent = 1 Hektar.
1 Hektar = 100 Ares.
1 Are = 100 Quadratmeter.
3,8 Quadratmeter = 1 Quadrattoise.
900 Quadrattoisen = 1 Arpent.

Der Kettensatz ist geschlossen, weil das letzte und erste Glied von gleicher Benennung sind. Werden die Produkte gleich gesetzt, so ist $900 \times 3{,}8 \times x = 100 \times 100$; wird die Division verrichtet, so kommt $x = \frac{1000}{342} = 2{,}924\ldots$. Ein Hektar ist also so viel wie $2\frac{924}{1000}$ Arpent, beinahe 3 Arpent.

§. 83. Werden Geldsummen, die in Münzen verschiedener Länder ausgedrückt sind, mit einander verglichen, so heißt die Kettenregel eine Wechselrechnung. Hier einige Beispiele:

1 Livre Sterling hat den Werth von 25,50 Francs. Wie viel Francs braucht man, um 120 Livres Sterling zu bezahlen? Der Ansatz ist:

x Francs = 120 Livres Sterling,
1 Liv. Sterl. = 25,50 Francs;
woraus $x = 120 \times 25{,}50 = 3060$ Francs.

Wie viel Francs betragen 100 spanische Pistolen, wenn 108 Sous 1 Piaster, und 4 Piaster 1 Pistole ausmachen? Man hat

x Francs = 100 Pistolen,
1 Pistole = 4 Piaster,
1 Piaster = 108 Sous,
20 Sous = 1 Franc.

Folglich $20 \times x = 100 \times 4 \times 108$; $x = 5 \times 4 \times 108 = 2160$ Francs.

Wie viel Francs betragen 100 Pistolen? Man weiß, daß 1 Ducat = 95 Deniers gros, 34 Sous gros = 1 Livre Sterling, 1 Pistole = 1088 Maravedis, 1 Ducaten = 375 Maravedis, 32 Deniers Sterling = 3 Francs. Die Livre Gros und die Livre Sterling werden, jede in 20 Sous zu 12 Deniers getheilt.

Der Ansatz folgt hier:

x Francs = 100 Pistolen,
1 Pistole = 1088 Maravedis,
375 Maravedis = 1 Ducaten,
1 Ducaten = 95 Deniers Gros,
12 Deniers Gros = 1 Sous Gros,
34 Sous Gros = 1 Livre Sterling,
1 Livre Sterling = 20 Sous Sterling,
1 Sous Sterl. = 12 Deniers Sterl.,
32 Deniers Sterl. = 3 Francs;

man findet bei der Ausrechnung:

$$x = \frac{100 . 1088 . 95 . 240 . 3}{375 . 12 . 34 . 32}, \text{ oder } x = 4 \times 19 \times 20 = 1520;$$

folglich 100 Pistolen so viel wie 1520 Francs.

§. 84. Um eine in einem bestimmten Maße gegebene Größe nach einem andern Maße auszudrücken, muß man das Verhältniß dieser Maße kennen. Diese Aufgaben lassen sich entweder durch einen einfachen Regeldetrisatz oder eine Kettenregel lösen.

Erläuterungsbeispiele:

I. Wie viel betragen 57 Toisen 5 Fuß 8 Zoll in Meter? Die Toise = 1,949 Meter; daher die Proportion:

1 Toise : 1,949 Meter = 57 T. 5 F. 8 Z. : x; x = 112,9337 M.

II. Wie viel Kilogramme betragen 13 Mark 5 Unzen 7 Quentchen? 2 Mark = 0,4895 Kilogramme; daher die Proportion:

2 M. : 0,4895 Kilogr. = 13 M. 5 U. 7 Q. : x; x = 3,3615 Kilogr.

III. Wie viel Pintes gehen auf 1 Liter? Die Pinte = 46,95 Cubikzoll; der Cubikzoll = 19,8364 Cubikcentimenter. — Der Ansatz ist hier:

x Pintes = 1 Liter,
1 Liter = 1000 Cubikcentimeter,
19,8364 Cubikcentimeter = 1 Cubikzoll,
46,95 Cubikzoll = 1 Pinte.

Die Ausrechnung gibt x = 1,073747 Pinte.

IV. Wie viel betragen 20 Magdeburger Hufen an sächsischen Ankern? 1 Hufe = 15 Morgen; 1 Morgen = 180 Quadratruthen rheinländisch; 1 Ruthe rheinländisch = 12 Fuß; eine Ruthe sächsisch = 16 Fuß; 12520 rheinländische Fuß = 13913 sächsische Fuß.

Der Kettensatz ist hiernach:

x Acker = 20 Hufen,
1 Hufe = 15 Morgen,
1 Morgen = 180 Quadratruthen,
1 Quadratruthe = 12^2 Quadratfuß,
$\overline{12520}^2$ □ Fuß = $\overline{13913}^2$ sächsische □ Fuß,
$\overline{16}^2$ □ Fuß = 1 sächsische □ Ruthe,
300 □ Ruthen = 1 Acker.

Die Ausrechnung gibt $x = \frac{20.15.180.\overline{12}^2.\overline{13913}^2}{\overline{12520}^2.\overline{16}^2.300} = 125,03.$

Also 20 Magdeburger Hufen so viel wie 125,03. sächsische Acker.

Von den Progressionen.

§. 85. Eine Reihe von Gliedern, in welcher jedes Glied das vorhergehende um gleich viel übertrifft, oder von ihm übertroffen wird, heißt eine **arithmetische Progression** oder Differenzenreihe. So bilden die Zahlen 1, 4, 7, 10.... eine arithmetische Progression. Man bezeichnet sie auch so: ÷ 1.4.7.10.13.16.... Das **Verhältniß** oder die **Differenz** der Reihe ist hier 3.

Es ist klar, daß das zweite Glied gleich dem ersten plus einmal die Differenz ist; das dritte gleich dem zweiten plus einmal die Differenz, d. h. gleich dem ersten plus zweimal die Differenz; das vierte ebenso gleich dem ersten plus dreimal die Differenz u. s. w. Ueberhaupt ist jedes Glied einer arithmetischen Progression gleich dem ersten Gliede plus so viel Mal die Differenz, als Glieder vorhergehen. Also

1) Kann man irgend ein Glied der Progression finden, ohne vorerst alle Zwischenglieder zu berechnen. So wird in der oben angegebenen Reihe das hundertste Glied $= 1 + 3 \times 99$ oder 298 sein.

2) Soll man zwischen 4 und 32 sechs mittlere arithmetische Proportionalen einschalten, d. h. diese zwei Zahlen durch Zwischenglieder so mit einander verbinden, daß sie eine Progression von 8 Gliedern bilden: so bemerke ich, daß das letzte Glied 32 der Reihe gleich dem ersten 4 plus siebenmal die Differenz ist, oder 32 — 4 oder 28 gleich siebenmal der unbekannten Differenz; folglich die Differenz $= \frac{28}{7} = 4$. Mithin ist die gesuchte Progression ÷ 4·8·12·16·20·24·28·32. Um also zwischen zwei gegebenen Zahlen mittlere arithmetische Proportionalen einzuschalten, dividire die Differenz dieser Zahlen durch die um 1

vermehrte Anzahl der mittlern Proportionalen; der Quotient gibt die gesuchte Differenz.

Sollen 8 mittlere arithmetische Proportionalzahlen zwischen 4 und 11 eingeschaltet werden, so findet man die Differenz $= \frac{11 - 4}{9} = \frac{7}{9}$. Die Progression ist demnach $\div\, 4 \cdot 4\tfrac{7}{9} \cdot 5\tfrac{5}{9} \cdot 6\tfrac{3}{9} \cdot 7\tfrac{1}{9} \cdot 7\tfrac{8}{9} \cdot 8\tfrac{6}{9} \cdot 9\tfrac{4}{9} \cdot 10\tfrac{2}{9} \cdot 11$.

§. 86. Eine **geometrische Progression** oder Quotientenreihe ist eine Reihe von Gliedern, von denen jedes das vorhergehende gleichviel Mal enthält oder in ihm enthalten ist. Eine solche Reihe ist $\div 3:6:12:24:48:96 \ldots$, in der 2 das Verhältniß oder den Quotienten bildet.

Das zweite Glied ist gleich dem ersten, multiplicirt mit dem Quotienten; das dritte gleich dem zweiten, multiplicirt mit dem Quotienten, also auch gleich dem ersten, multiplicirt mit dem Quadrat des Quotienten; ebenso ist das vierte das Produkt aus dem ersten mit dem Cubus des Quotienten ꝛc. Ueberhaupt ist jedes Glied einer geometrischen Progression ein Produkt aus zwei Factoren, deren einer das erste Glied und der andere eine Potenz vom Quotienten ist, deren Grad durch die Zahl der vorhergehenden Glieder angedeutet wird. Man kann also

1) Den Werth eines Gliedes finden, ohne deshalb nöthig zu haben, sämmtliche vorhergehende Glieder zu berechnen. Das zehnte Glied unserer obigen Reihe ist $3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1536$.

2) Um zwischen 3 und 1536, 8 mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten, bemerke ich, daß die Progression 10 Glieder haben soll, und das letzte Glied 1536 dem ersten 3, multiplicirt mit der neunten Potenz des Quotienten, gleich ist. Dividirt man also 1536 durch 3, so ist der Quotient die neunte Potenz des gesuchten Verhältnisses; woraus das Verhältniß $= \sqrt[9]{512} = 2$ (§. 69). Um folglich zwischen zwei gegebenen Zahlen eine bestimmte Anzahl mittlerer geometrischer Proportionalen einzuschalten, muß man den Quotienten jener zwei Zahlen nehmen und aus solchem dann eine Wurzel ziehen, deren Grad gleich der um 1 vermehrten Anzahl der mittlern Proportionalen ist; diese Wurzel ist das gesuchte Verhältniß der Reihe.

Sollen z. B. zwischen 8 und 64 vier mittlere Proportionalen eingeschaltet werden, so muß man die fünfte Wurzel aus $\frac{64}{8}$ oder $\sqrt[5]{8}$ ziehen, was eine irrationale Größe ist (§. 63). Man kann also diese

mittlern geometrischen Proportionalen nicht genau angeben, man kann ihnen aber so nahe kommen als man will. Das Verhältniß ist $\sqrt[5]{8} = 1,5157$; mithin die gesuchte Progression ∺ 8 : 12,1257 : 18,3792 : 27,8576 : 42,2243 : 64.

Von den Logarithmen.

§. 87. Wir bemerken, daß die auf arithmetische Progressionen Bezug habenden Sätze in die den geometrischen Reihen entsprechenden verwandelt werden, wenn man die Addition in Multiplication, die Subtraction in Division, die Multiplication in eine Potenzrechnung und die Division in eine Wurzelausziehung umändert. Auf dieser Bemerkung beruht die Lehre von den Logarithmen.

Wir denken uns zwei Progressionen, eine geometrische und eine arithmetische in der Art, daß die Glieder sich je zwei entsprechend sind, wie z. B.

∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187. . Zahlen.
÷ 0 · 2 · 4 · 6 · 8 · 10 · 12 · 14 . . Logarithmen.

Jedes Glied in der zweiten Reihe wird der **Logarithme** der dazu gehörigen Zahl in der ersten Reihe genannt; 0 ist der Logarithme von 1; 2 ist der Logarithme von 3, 4 der von 9, 6 der von 27, 2c. Die Logarithmen sind also Zahlen einer arithmetischen Progression, welche zu andern einer geometrischen Progression angehörigen Zahlen Glied für Glied entsprechend sind.

Da die Logarithmen nur vermittelst derjenigen Eigenschaften von Nutzen sind, welche voraussetzen, daß die eine dieser Progressionen mit 1 und die andere mit 0 anfange: so werden wir uns blos mit solchen beschäftigen, welche dieser Bedingung genügen.

Aus dem früher Gesagten (§§. 85 und 86) und aus der Annahme, zu Folge der die eine unserer Progressionen mit Eins, die andere mit Null anfängt, ergibt sich, daß irgend ein Glied der ersten Reihe aus dem Verhältnisse durch eben so viel Multiplicationen mit sich selbst, und das der zweiten Reihe durch eben so viel Additionen zu sich selbst, als Glieder ihnen vorhergehen, entstanden ist.

Die sechsten Glieder z. B. sind 243, die fünfte Potenz des Verhältnisses 3, und 10 das Fünffache des Verhältnisses 2. (Also ist das eine Verhältniß eben so oft Factor einer Zahl, als das andere in ihrem Logarithmen addirt enthalten ist.)

Multiplicirt man zwei Glieder einer geometrischen Reihe mit einander, wie z. B. 9 und 243, so wird das Verhältniß 3 in dem Produkt siebenmal als Factor enthalten sein (§. 60), weil es zweimal in 9 und fünfmal in 243 enthalten ist; das Produkt 9×243 oder 2187 ist folglich das achte Glied der ersten Progression. Addirt man aber die entsprechenden Glieder 4 und 10 der arithmetischen Progression, so wird das Verhältniß 2 auch siebenmal in der Summe 14 addirt sein, folglich sind das Produkt 2187 und die Summe 14 sich entsprechende Glieder, und 14 der Logarithme von 2187; daher ist die Summe der Logarithmen zweier Zahlen der Logarithme ihres Produktes. Um z. B. 27 mit 9 zu multipliciren, reicht es hin, die Logarithmen 4 und 6, welche diesen Factoren entsprechen, zu addiren und die Zahl 243 zu suchen, welche der in der Logarithmenreihe genommenen Summe 10 angehörig ist; 243 ist das verlangte Produkt.

Hieraus folgt, daß das Doppelte von dem Logarithmen einer Zahl der Logarithme von dem Quadrat, das Dreifache der Logarithme von dem Cubus dieser Zahl ist. Ueberhaupt erhält man durch Multiplication eines Logarithmen einer Zahl mit irgend einem Factor den Logarithmen der durch diesen Factor angezeigten Potenz jener Zahl. Für 9^3 verdreifacht man 4, welche der Zahl 9 entspricht und ihr Logarithme ist; $3 \times 4 = 12$ gehört dann zu $729 = 9^3$.

Die umgekehrten Operationen sind leicht zu erweisen. Der Logarithme eines Quotienten plus dem des Divisors, gibt nämlich den des Dividends; folglich ist der Logarithme des Quotienten zweier Zahlen gleich der Differenz der Logarithmen dieser Zahlen. Um 243 durch 27 zu dividiren, ziehe 6 von 10 ab, die Differenz 4 ist der Logarithme von 9; also ist 9 der gesuchte Quotient.

Ebenso ist der Logarithme irgend einer Wurzel aus einer Zahl der Quotient aus dem Logarithmen dieser Zahl durch den Grad der Wurzel. $\sqrt[3]{729}$ wird gefunden, indem man den dritten Theil von 12 nimmt und 4 unter den Logarithmen aufsucht. Die entsprechende Zahl 9 ist die verlangte Wurzel.

§. 88. Hätte man anstatt 3 eine bedeutend kleinere Zahl als Verhältniß der geometrischen Reihe gewählt, so würden oben erwähnte Eigenschaften noch fort bestanden haben. Die Größen, welche diese Reihe ausmachen, wären nur näher aneinander gerückt, und man hätte näherungsweise die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5.... gefunden. Denken wir

uns also eine Progression gebildet, deren Quotient oder geometrisches Verhältniß hinreichend klein ist, um sehr nahe in ihr alle ganzen Zahlen zu finden, dabei eine Tabelle aufgestellt, in der diese Zahlen nebst ihren Logarithmen, mit Hinweglassung übrigens aller anderen Zwischenglieder, eingeschrieben sind: so würden die vorhin erwiesenen Sätze gleichfalls richtig sein. Bei der Voraussetzung einer solchen Tafel ergeben sich dann folgende Regeln:

1) Um gegebene Zahlen mit einander zu multipliciren, reicht es hin, in der Tafel ihre Logarithmen zu nehmen, solche zu addiren und in der Logarithmenreihe die Summe aufzusuchen; die ihr entsprechende Zahl gibt das verlangte Produkt.

Beispiel: Man verlangt das Produkt von 47 × 863. Die Tafel gibt die Logarithmen dieser Zahlen; man addirt sie, wie hier neben geschehen ist; sucht dann die Summe unter den Logarithmen; die Tafel gibt 40561 als entsprechende Zahl, welche das verlangte Produkt ist.

Log. 47	= 1,6720979
Log. 863	= 2,9360108
Summe	= 4,6081087

2) Um eine Zahl durch eine andere zu dividiren, zieht man den Logarithmen des Divisors von dem des Dividends ab; den Rest sucht man unter den Logarithmen auf; die dazu gehörige Zahl ist der verlangte Quotient.

Beispiel: Man soll 40561 durch 863 dividiren. Die Tafel liefert die Logarithmen dieser Zahlen; man zieht sie von einander ab und sucht die Differenz unter den Logarithmen auf; die ihr entsprechende Zahl 47 ist der verlangte Quotient.

Log. 40561	= 4,6081087
Log. 863	= 2,9360108
Rest	= 1,6720979

3) Um einen Regeldetriansatz aufzulösen, addirt man die Logarithmen der mittlern Glieder, und zieht von der Summe den des bekannten äussern ab; die dem Resultate entsprechende Zahl gibt das unbekannte äussere.

Beispiel: Es sei die Proportion $153 : 459 = 17 : x$. Man nimmt die Logarithmen dieser drei Zahlen, zieht den des erstern Gliedes 153 von der Summe der Logarithmen der beiden andern ab. Man kann auch, statt den Logarithmen von 153 abzuziehen, sein arithmetisches Complement hinzu addiren (§. 10). Das in der Logarithmen-

Log. 17	= 1,2304489
Log. 459	= 2,6618127
—Log. 153	= 2,1846914
	1,7075702

Tafel aufgesuchte Resultat gibt die zugehörige Zahl 51 als viertes Glied.

4) Um den Logarithmen eines Bruches zu finden, zieht man den Logarithmen des Nenners von dem des Zählers ab; der Rest ist der verlangte Logarithme. Die Tafeln enthalten nur die Logarithmen der ganzen Zahlen; mittelst dieses Satzes wird ihr Gebrauch auf die Brüche ausgedehnt.

Beispiel: Will man den Logarithmen von $3\frac{5}{7}$ oder $\frac{26}{7}$ haben, so zieht man den Logarithmen von 7 von dem von 26 ab. — Soll man das Produkt von $3\frac{5}{7}$ mit $2\frac{2}{13}$, oder von $\frac{26}{7}$ mit $\frac{28}{13}$ bilden, so muß man die Logarithmen dieser zwei Brüche addiren, d. h. Log. 26 — Log. 7 + Log. 28 – Log. 13 nehmen. Man sieht diese Rechnung hier ausgeführt. Das Resultat ist Log. 8; folglich 8 das verlangte Produkt, was übrigens leicht vorauszusehen war.

Log. 26	=1,4149734
Log. 28	=1,4471580
—L. 7	=0,8450980
—L. 13	=1,1139434
	0,9030900

5) Um eine Zahl auf eine Potenz zu erheben, multiplicirt man den Logarithmen der Zahl mit dem Grade der Potenz; das Produkt wird in der Logarithmentafel aufgesucht; solches entspricht der verlangten Potenz.

Beispiel: Die fünfte Potenz von 17 wird gefunden, wenn man fünfmal den Logarithmen von 17 nimmt und das Produkt in der Columne der Logarithmen aufsucht; es entspricht der verlangten Zahl $17^5 = 1419857$.

Log. 17	=1,2304489
	5
	6,1522445

6) Um die Wurzel aus einer Zahl zu ziehen, dividirt man den Logarithmen dieser Zahl durch den Grad der Wurzel, und sucht den Quotienten in der Logarithmentafel auf; die zugehörige Zahl ist die verlangte Wurzel.

Beispiel. Die fünfte Wurzel aus 1419857 wird gefunden, indem man den Logarithmen der gegebenen Zahl durch 5 dividirt und den Quotienten in der Columne der Logarithmen sucht; die dazu gehörige Zahl ist die verlangte Wurzel.

Man sieht hieraus, daß die verwickeltesten Rechnungen mittelst der Logarithmen sehr leicht werden. Die Multiplication und Division ist hiernach durch eine Addition und eine Subtraction ersetzt; die Potenzerhebung und das Wurzelausziehen in eine Multiplication und Division verwandelt. Diese merkwürdigen Eigenschaften zeigen ihre große

Wichtigkeit in der Anwendung. — Pflicht ist's, das Andenken an ihren Erfinder, den berühmten schottischen Mathematiker Neper, zu bewahren.

§. 89. Bildung der Tafeln. Wir wollen jetzt erklären, wie man die Logarithmen sämmtlicher ganzen Zahlen finden kann. Bisher waren unsere Progressionen, die arithmetische und geometrische, beide willkührlich: also hat eine Zahl eine unendliche Anzahl von Logarithmen. Wir werden bald einsehen, warum man nachstehenden Reihen den Vorzug gegeben hat.

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 . . . . Zahlen.
÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . . . . Logarithmen.

0, 1, 2.... sind die Logarithmen von 1, 10, 100....; es handelt sich darum, die Logarithmen von 2, 3, 4...., welche offenbar zwischen 0 und 1 liegen, desgleichen die von 11, 12.... 99, welche zwischen 1 und 2 enthalten sind, zu finden, ꝛc.; man begnügt sich gewöhnlich mit 7 Decimalstellen.

Wir bemerken, daß wenn in einer Progression, wie z. B. ÷ 0 . 2 . 4 . 6 . 8.... ein Glied auf zwei auf einander folgenden, oder 2 Glieder auf 3...., weggelassen werden, man dadurch andere Progressionen 0 . 4 . 8 . 12, oder 0 . 6 . 12.... bildet. Ebenso kann man sich vorstellen, daß die gewählten Progressionen bloß Theile von zwei andern ausmachen, deren Glieder bedeutend näher aneinander lägen und von denen eine gewisse Anzahl Zwischenglieder weggelassen wäre. Denken wir uns also eine sehr große Anzahl von mittlern geometrischen Proportionalen zwischen 1 und 10 eingeschaltet: da man auf diese Weise durch sehr nahe liegende Abstufungen von 1 zu 10 aufsteigt, so ereignet es sich, daß man unter diesen mittlern Proportionalen die Zahlen 2, 3, 4.... bis auf ein Zehnmilliontel genau antreffen wird. Dies vorausgesetzt, schaltet man nun eine gleiche Anzahl von arithmetischen Proportionalen zwischen 0 und 1 ein, so werden diejenigen von diesen Proportionalen, welche hier eine und dieselbe Stelle, wie 2, 3, 4...., einnehmen, die Logarithmen solcher Zahlen abgeben. Dieselbe Schlußweise wendet man von 10 zu 100 an, ꝛc.

Es ist wahr, daß um eine große Anzahl von mittlern geometrischen Proportionalen einzuschalten, man eine Wurzelausziehung von einem hohen Grade verrichten muß; diese Schwierigkeit wird übrigens mittelst verschiedener auf einander folgender Quadratwurzeln vermie-

den. Wir wollen z. B. den Logarithmen von 3 suchen. Die mittlere geometrische Proportionale zwischen 1 und 10 ist 3,16227766 und die arithmetische zwischen 0 und 1 ist 0,5; 0,5 ist folglich der Logarithme von 3,1622...., eine schon an 3 grenzende Zahl. Eine ähnliche Operation für 1 und 3,1622.... einerseits, und für 0 und 0,5 anderseits, gibt 0,25 als Logarithmen von 1,77827941. Ebenso findet man zwischen 1,7782...... und 3,1622...... einerseits, und zwischen 0,25, und 0,5 anderseits als mittlere Proportionalen 2,37137370 und 0,375. Fährt man auf solche Weise fort diese Grenzen näher an einander zu rücken, so findet man 0,30102999 und 0,47712125 als Logarithmen von 2 und 3.

Diese Rechnungen sind äusserst beschwerlich; es ist zwar wahr, daß man solche nur für die Primzahlen auszuführen braucht, weil die andern Logarithmen sich daraus ableiten lassen. Dem ohngeachtet aber sind die übrigbleibenden Operationen hinreichend, alle Geduld zu erschöpfen. Auch haben wir dies Verfahren nur als ein Mittel, um eine Idee von der Bildung solcher Tafeln zu bekommen, angegeben; andere Methoden, welche schneller zum Ziele führen, sollen später erwähnt werden.

§. 90. Leicht ist's jetzt, den Grund anzugeben, warum man den zwei oben angenommenen Progressionen den Vorzug gegeben hat. Jeder Logarithme besteht aus einer ganzen Zahl, die man Kennziffer oder Charakteristik nennt, und einem Decimalbruch, der Mantisse heißt.

1) Haben die zwischen 1, 10, 100... enthaltenen Zahlen ihre Logarithmen bezüglich zwischen 0, 1, 2... liegen, d. h. die Charakteristik eines Logarithmen ist immer um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern, mit welchen die dazu gehörige Zahl geschrieben ist. Dies setzt uns in Stand, die Anzahl der Ziffern zu bestimmen, sobald die Charakteristik gegeben ist, und umgekehrt. Die Zahl 543,21 hat zwei Einheiten in ihrem Logarithmen; und 3,47712115 ist der Logarithme einer Zahl, die 4 Ziffern in den Stellen der Ganzen hat. Man überhebt sich öfters der Mühe, in den Logarithmentafeln die Charakteristik, welche daselbst unnöthig ist, aufzunehmen.

2) Soll man eine Zahl mit 10, 100, 1000.... multipliciren oder dividiren, so muß man ihrem Logarithmen 1, 2, 3... Einheiten hinzufügen, oder solche von ihm abziehen. Die Charakteristik um 1, 2, 3....

vermehren oder vermindern, heißt also, die dazu gehörige Zahl mit 10, 100, 1000.... multipliciren oder dividiren, oder das Komma der Zahl um 1, 2, 3... Stellen nach der rechten oder linken Hand fortrücken. Die Logarithmen der Zahlen 3,4578 und 34,578 und 345,78 haben einerlei Mantisse; nur die Charakteristik ist bei ihnen verschieden und bezüglich 0, 1, 2....

Dies sind die Vortheile, welche das gemeine oder Briggs'sche Logarithmensystem darbietet, und die ihm den Vorrang bei Abfassung der Tafeln verschafft haben. Wir werden es in der Folge durch das Zeichen Log. ausdrücken: also Log. 5 stellt den Tafel-Logarithmen von 5 dar, d. h. den Logarithmen in der Zusammenstellung der zwei Progressionen des §. 89 genommen.

§. 91 Gebrauch der Tafeln. Man muß Logarithmentafeln unter Händen haben, um ihren Gebrauch zu verstehen. Die Tafeln von Callet, Delalande und von Vega sind die gebräuchlichsten. Wir wollen hier nicht die Art des Gebrauchs dergleichen Tafeln kennen lehren; einige Hauptpunkte aber darüber, die unmittelbar an die Theorie sich knüpfen, anzugeben, möchte räthlich sein.

I. Die Logarithmen der Zahlen, die kleiner als 1 sind, bieten eine Schwierigkeit dar. Man muß nämlich den Logarithmen des Nenners von dem des Zählers abziehen (§. 88), wenn man den Logarithmen eines Bruches nehmen soll; ist dieser nun kleiner als 1, so kann die Subtraction nicht bewerkstelligt werden. Um z. B. 5 mit $\frac{3}{4}$ zu multipliciren, was so viel ist, wie 5 durch $\frac{4}{3}$ dividiren, ist es einerlei ob man Log. $\frac{3}{4}$ zu Log. 5 addirt, oder Log. $\frac{4}{3}$ von Log. 5 abzieht; letztere Operation wird vorgezogen. Hieraus sieht man, daß der Logarithme des Zählers von dem des Nenners abzuziehen, dieser Logarithme aber dann im entgegengesetzten Sinne zu brauchen ist; d. h. man zieht ihn ab, wenn er addirt werden sollte, und umgekehrt. Solche Werthe heißen negative Logarithmen, und werden durch das vor sie gesetzte negative Zeichen unterschieden. Ein wenig Aufmerksamkeit reicht hin, um Fehler zu vermeiden.

Hier folgen einige Beispiel, geeignet, diese Rechnungsarten deutlich zu machen:

1) $x = \frac{42{,}212 \times \frac{3}{5}}{0{,}04}$

Log. 5 = 0,6989700	Log. 100 = 2,0000000
— L. 3 = 0,4771213	— Log. 4 = 0,6020600
Log. $\frac{3}{5}$ = —0,2218487	Log. 0,04 = —1,3979400
Log. 42,212 = 1,6254359	1,4035872
1,4035872	Log. x = 2,8015272
	x = 633,18

2) $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$; man zieht Log. 5 von Log. 7 ab und nimmt die Hälfte davon. Um die diesem Resultate, einem negativen Logarithmen, zugehörige Zahl zu finden, zieht man es von 1 ab, was die Zahl zehnmal zu groß macht; man hat + 0,9269360, wozu 8,45154 gehört: folglich x = 0,845154.

Log. 7 = 0,8450980
—Log. 5 = 0,6989700
Log. $\frac{5}{7}$ = —0,1461280
Log. x = —0,0730640
Compl. = 0,9269360

3) $x = \frac{\sqrt[3]{0{,}00027}}{32{,}41}$; man nimmt das Drittel von Log. 100000 — Log. 27, rc., zieht dann Log. x = — 2,7002244 von 3 ab, was die Zahl tausendmal zu groß macht; es kommt + 0 2997756, wozu die Zahl 1,9942 gehört; folglich x = 0,0019942.

Log. 100000 = 5,0000000
Log. 27 = 1,4313638
Log. 0,00027 = —3,5686362
das Drittel = —1,1895454
Log. 32,41 = —1,5106790
Log. x = —2,7002244
Compl. = 0,2997756

4) $x = \frac{\sqrt[3]{(\overline{63{,}82}^2 \times 5873{,}4)}}{567{,}43}$

Man hat Log. x = 2,2082970; also x = 161,5.

Log. $\overline{638{,}2}^2$ = 5,6099136
Log. 5873,4 = 3,7688896
9,3788032
Log. 567,43 = 2,7539123
Log. x^3 = 6,6248909
Log. x = 2,2082970

II. Bequemer ist's, anstatt der negativen Logarithmen, andere mit bloß **negativer Charakteristik** zu gebrauchen. So macht man in dem zweiten Beispiele Log. $\frac{5}{7}$ = Log. 5 — Log. 7 die Subtraction dadurch möglich, daß man 1 der Charakteristik von Log. 5 hinzufügt; in der erhaltenen Differenz wird übrigens hernach die hinzugefügte Einheit wieder in Abzug gebracht; man hat demnach Log. $\frac{5}{7}$ = — 1 + 0,8538720, was man auch so schreibt, $\overline{1}$,8538720 oder 0,8538720 — 1. Die Charak-

1 + Log. 5 = 1,6989700
Log. 7 = 0,8450980
Log. $\frac{5}{7}$ = $\overline{1}$,8538720
oder —2 + 1,8538720
Log. x = $\overline{1}$,9269360

teristik ist hier allein negativ; wie hier oben ist bei den noch kommenden Rechnungen darauf Acht zu haben. In unserm Beispiele, in welchem man die Hälfte zu nehmen hat, addirt man 1 zur negativen Charakteristik, wodurch sie — 2 wird; desgleichen 1 Ganzes zu der Ziffer 8 der Zehntel, woraus 18 entstehen. Diese beiden Additionen der additiven und subtractiven Einheit ändern nichts in dem Logarithmen; die Hälfte ist wie oben Log. $x = \bar{1},9269360$. Die eben erwähnte Addition geschah deshalb, um eine ganzzahlige Charakteristik im Resultate zu erhalten. Hiernach muß man, wenn ein Logarithme mit negativer Charakteristik durch eine Zahl dividirt werden soll, immer darauf sehen, daß die negative Charakteristik durch den Divisor theilbar werde, was dadurch geschieht, daß man ihr eine hinlängliche Anzahl von Einheiten hinzufügt, bis sie ein Vielfaches des Divisors wird, dagegen die folgende Ziffer, welche in der ersten Decimalstelle sich befindet, um eben so viele Zehnereinheiten vermehrt, als jene Ergänzung ausmacht. Die erste und zweite der obigen Rechnungsoperationen sind nach dieser Vorschrift hier unten ausgeführt; man sieht, daß die Rechnungen dadurch erleichtert und schneller zu Ende gebracht werden.

Log. 3 = 0,4771213	Log. 0,00027 = 0,4313638 — 4
Log. 42,212 = 1,6254359	Man addirt 2 zur Charakteristik um das Drittel zu nehmen. = 0,8104546 — 2
— Log. 5 = 0,6989700	— Log. 32,41 = — 1,5106790
— Log. 0,04 = 0,6020600 — 2	Log. x = 0,2997756 — 3
Log. x = 2,8015272	

Anstatt die Logarithmen von einander abzuziehen, kann man auch ihre arithmetischen Complemente addiren.

In dem ersten Beispiele addirt man, für Log. $\frac{3}{5}$, zu Log. 3 das arithmetische Complement von Log. 5. Der dabei sich ergebende Vortheil ist fast null, da man jene sämmtlichen Additionen und Subtractionen auf einmal verrichten kann.

Log. 3	= 0,4771213
Compl. L. 5	= 0,3010300 — 1
Log. 42,212	= 1,6254359
Cpl. L. 0,04	= 1,3979400
Log. x	= 2,8015272

Will man eine Rechnung mit Hülfe der Logarithmen bewerkstelligen, so ist es vortheilhaft die Ausdrücke vorerst zu vereinfachen. So reducirt sich das erste Beispiel auf $x = \frac{1}{2} \times 3 \times 422,12 = 1,5 \times 422,12$.

III. Um die Logarithmen der zwischen irgend zwei Zahlen liegenden Ganzen, wie z. B. 10 und 20, zu erhalten, muß man sich eine

hinlängliche große Anzahl von mittlern geometrischen Proportionalen eingeschaltet denken, dergestalt, daß man unter diesen mittlern Proportionalen, von denen die einen von den andern sehr wenig verschieden sind, deren antrifft, die näherungsweise als gleich 11, 12, 13 . . . angesehen werden können, d. h. jene mittlern Proportionalen dürfen erst in der Ordnung der zu vernachläßigenden Decimalstellen von 11, 12, 13... abweichen. In einer geometrischen Progression, wie z. B. ∺8:32:128...., deren Verhältniß 4 ist, hat man $32 = 8 + 8 \cdot 3$, $128 = 32 + 32 \cdot 3$.... Also ist der Ueberschuß eines Gliedes über das nächstvorhergehende das Produkt aus diesem letztern, multiplicirt mit dem um eins verringerten Verhältnisse. Der eine von diesen Factoren wächst mit der Stelle des Gliedes, während der andere unveränderlich ist; dieser Unterschied nimmt folglich stets zu, und es liegen weniger Ganze zwischen 8 und 32, als zwischen 32 und 128.... Um nun die Logarithmen dieser dazwischen liegenden Ganzen zu erhalten, muß man eine hinreichende Anzahl von mittlern geometrischen Proportionalen und eine gleiche Anzahl mittlerer arithmetischer Proportionalen zwischen die beiden entsprechenden Glieder der Logarithmen-Reihe einschalten. Die unveränderliche Differenz dieser letztern wird also, in dem Maß als das Ganze zunimmt, auf eine größere Anzahl von Gliedern vertheilt werden; woraus hervorgeht, daß je größer die Zahl ist, desto kleiner wird der Unterschied ihres Logarithmen und des unmittelbar folgenden der Tafel. So sind 0, 1, 2.... die Logarithmen von 1, 10, 100....; unter die 9 Zahlen zwischen 1 und 10 wird auf ihre Logarithmen die Einheit, obgleich auf eine ungleiche Weise, vertheilt; ebenso wird auf die 90 Zahlen zwischen 10 und 100, auf die 900 Zahlen von 100 bis 1000...., bloß eine Einheit vertheilt.

Die logarithmischen Differenzen nähern sich einander immer mehr und mehr, so daß sie nur in den zwei oder drei letzten Decimalstellen von einander verschieden sind und in einer gewissen Ausdehnung der Tafel dieselben bleiben. So ist z. B., wenn man sich auf sieben Decimalstellen beschränkt, 79 die Differenz sämmtlicher Logarithmen der Zahlen von 54700 bis 55300 ohngefähr. Die logarithmische Differenz ist jedoch keineswegs unveränderlich; bei einer größern Anzahl von Decimalstellen würde man solche stets sich ändern sehen.

Obgleich es also unrichtig ist, wenn man sagt, daß die Zahlen proportional zu ihrem Logarithmen wachsen: so sieht man jedoch, daß es, wenigstens für große Zahlen, und in einer kleinen Ausdehnung,

ohne Fehler angenommen werden darf. Dies vorausgesetzt, wollen wir nun die Logarithmen einer die Grenzen der Tafel überschreitenden Zahl, z. B. von 5487343 mittelst einer Tafel, die nur bis 100000 geht, bestimmen. Man läßt 43 weg und sucht in den Tafeln den Logarithmen von 54873; man findet 7393587, der von dem Logarithmen von 54874 um 79 verschieden ist. Da dem Unterschiede von einer Einheit zwischen den Zahlen eine logarithmische Differenz von 79 ententspricht, so setzt man folgende Proportion an: Wenn die Differenz von 1 zwischen den Zahlen eine logarithmische Differenz von 79 gibt, wie viel beträgt solche bei einer Differenz von 0,43 zwischen den Zahlen? oder $1 : 79 = 0{,}43 : x = 34$. Also übertrifft der Logarithme von 54873,43 den von 54873 um 34; addirt man hiernach zum letztern 34, so hat man 7393621; es bleibt nun noch übrig, um den gesuchten Logarithmen zu erhalten, die Charakteristik, welche nach der Stelle des Kommas sich richtet, anzusetzen. Man hat demnach Log. 54,87343 = 1,7393621; Log. 0,5487343 = 0,7393621 — 1, ꝛc.

Anmerkung. Es ist fast unnöthig zu bemerken, daß in unserer Proportion 79 und 34 die Stellen von 0,0000079 und 0,0000034 vertreten. — In guten Logarithmentafeln sind die Differenzen zwischen den Logarithmen der auf einander folgenden Zahlen mit angegeben.

IV. Soll man umgekehrt zu einem Logarithmen 0,7393621 — 1 die entsprechende Zahl finden, so sieht man bald, daß dieselbe, abgesehen von der Charakteristik, zwischen die Zahlen 5487300 und 5487400 fällt, und daß 34 die Differenz zwischen dem gegebenen Logarithmen und dem von 5487300 ist; man setzt daher die Proportion an, $79 : 1 = 34 : x$; sie ist zu der kurz vorher angewendeten umgekehrt und gibt $x = 0{,}43$. Zu dem vorgelegten Logarithmen gehört demnach die Zahl 0,5487343.

Hier stehen einige Beispiele über die Kettenregel, wobei die Rechnungen mit Hülfe der Logarithmen abgekürzt werden:

1) Wie viel Metertheile beträgt der englische Fuß, der 0,938293 französische Fuß macht?

x Meter = 1 englischer Fuß,
1 engl. Fuß = 0,938293 franz. Fuß..... Log. = 0,9723385 — 1
1 franz. Fuß = 0,3248394 Meter...... Log. = 0,5116687 — 1
x = 0,304794 Meter................ Log. = 0,4840072 — 1

2) Ein Cubikcentimeter Wasser wiegt ein Gramm; was wiegt ein Cubikfuß Wasser?

$x = 1$ Cubikfuß,	
29,17386 Cubikfuß = 1000 Cubikdecimeter	Log. = —1,4649939
1 Cubikdecimeter = 1000 Cubikcentimeter	Log. = +3,0000000
1 Cubikcentimeter = 1 Gramm,	
1000 Gramme = 2,04288 ℔	Log. = +0,3102421
$29{,}17386 \times x = 1000 \times 2{,}04288$	Log. $x = +1{,}8452482$

$x = 70{,}0242$ ℔ Gewicht eines Cubikfußes destillirtes Wasser.

3) In einem Lande hält die Längenruthe 20 Fuß, der 13 franz. Zoll beträgt; wie viel französische Ares macht die Quadratruthe dieses Landes, wenn auf eine Are 26,3245 Quadrattoisen gehen?

1 Are = 26,3245 Quadrattoisen	169........ 2,2278867
1 = 36 franz. Quadratfuß	400........ 2,6020600
1 = 12·12 frz. Quadratzoll	26,3245.. —1,4203600
13×13 = 1 Quadratfuß	36....... —1,5563025
20×20 = 1 Quadratruthe	144 ..... —2,1583625
1 = x Ares.	
$169 \times 400 = 26{,}3245 \times 36 \times 144 \cdot x$	x.......... 0,6949217—1
	$x = 0{,}4954$ Are.

4) Wie viel Dekaliter gehen auf den Boisseau? Der Boisseau = 655,78 Cubikzoll; 443,296 Linien = 1 Meter.

x Dekaliter = 1 Boisseau	100......... 2
1 = 655,78 Cubikzoll	1728........ 3,2375437
1 = 12×12×12 Cubiklinien	655,78...... 2,8167582
$(443{,}296)^3$ = 1 Cubikmeter	$(443{,}296)^3$ —7,9400814
1 = 1000 Cubikdecimeter	x........... 0,1142205
1 = Liter	$x = 1{,}30083$ Dekal.
10 = 1 Dekaliter.	
$(443{,}296)^3 \cdot x = 100 \cdot 1728 \cdot 655{,}78.$	

Tafel

derjenigen Zahlen V, welche kleiner als 2461 und Vielfache von andern Primzahlen, als von 2, 3 und 5 sind, nebst ihren kleinsten Theilern d.

V	d	V	d	V	d	V	d	V	d	V	d	V	d	V	d
49	7	469	7	779	19	1073	29	1349	19	1651	13	1909	23	2183	37
77	7	473	11	781	11	79	13	51	7	61	11	19	19	89	11
91	7	481	13	791	7	81	23	57	23	73	7	21	17	97	13
119	7	493	17	793	13	99	7	1363	29	79	23	27	41	2201	31
121	11	497	7	799	17	1111	11	69	37	81	41	37	13	09	47
133	7	511	7	803	11	21	19	79	7	87	7	39	7	19	7
143	11	517	11	817	19	27	7	87	19	91	19	43	29	27	17
161	7	527	17	833	7	33	11	91	13	1703	13	57	19	31	23
169	13	529	23	841	29	39	17	93	7	11	29	61	37	33	7
187	11	533	13	847	7	41	7	97	11	17	17	63	13	49	13
203	7	539	7	851	23	47	31	1403	23	27	11	67	7	57	37
209	11	551	19	869	11	57	13	11	17	29	7	69	11	61	7
217	7	553	7	871	13	59	19	17	13	39	37	81	7	63	31
221	13	559	13	889	7	69	7	21	7	51	17	91	11	79	43
247	13	581	7	893	19	77	11	41	11	57	7	2009	7	91	29
253	11	583	11	899	29	83	7	57	31	63	41	21	43	99	11
259	7	589	19	901	17	89	29	63	7	69	29	33	19	2303	7
287	7	611	13	913	11	99	11	69	13	71	7	41	13	17	7
289	17	623	7	917	7	1207	17	77	7	81	13	2047	23	21	11
299	13	629	17	923	13	11	7	1501	19	93	11	51	7	23	23
301	7	637	7	931	7	19	23	07	11	99	7	57	11	27	13
319	11	649	11	943	23	41	17	13	17	1807	13	59	29	29	17
323	17	667	23	949	13	43	11	17	37	13	7	71	19	53	13
329	7	671	11	959	7	47	29	19	7	17	23	77	31	59	7
341	11	679	7	961	31	53	7	29	11	19	17	93	7	63	17
343	7	689	13	973	7	61	13	37	29	29	31	2101	11	69	23
361	19	697	17	979	11	67	7	41	23	37	11	07	7	87	7
371	7	703	19	989	23	71	31	47	7	41	7	17	29	2401	7
377	13	707	7	1001	7	73	19	61	7	43	19	19	13	07	29
391	17	713	23	1003	17	1309	7	73	11	49	43	23	11	13	19
403	13	721	7	1007	19	13	13	77	19	53	17	47	19	19	41
407	11	731	17	27	13	31	11	89	7	59	11	59	17	29	7
413	7	737	11	37	17	33	31	91	37	83	7	67	11	31	11
427	7	749	7	43	7	37	7	1603	7	91	31	71	13	43	7
437	19	763	7	57	7	39	13	31	7	97	7	73	41	49	31
451	11	767	13	67	11	43	17	49	17	1903	11	77	7	2453	11

Es fragt sich, ob die Zahlen 1843, 1907 und 29055 Primzahlen, und welches ihre Theiler sind?

1) Die Tafel zeigt, daß 1843 ein Vielfaches von 19 und $= 19 \times 97$ ist.

2) 1907 ist eine Primzahl, weil sie sich in der Tafel nicht vorfindet, und 2, 3 und 5 keine Theiler von ihr abgeben.

3) 29055 ist theilbar durch 3 und 5 und der Quotient 1937 ein Vielfaches von 13; daher $29055 = 3 \times 5 \times 13 \times 149$.

Noten zur Arithmetik.

Note 1 zu §. 6.

Das in diesem Paragraphen angewandte Prinzip kann dazu dienen, sämmtliche Zahlen mit mehr oder weniger als 10 Ziffern zu schreiben. Will man z. B. nur die vier Ziffern 0, 1, 2 und 3 gebrauchen, so muß die auf der linken Seite einer Ziffer stehende Ziffer einen viermal größern Werth haben, als der beträgt, den sie in der Stelle der ersten Ziffer einnimmt. 10 bedeutet also 4; 11 fünf; 12 sechs; 13 sieben; 20 acht; 21 neun; 200 zweiunddreißig und so fort. — Wird eine Zahl dieser Annahme zufolge geschrieben, so findet man bei dem Aussprechen derselben mehr Schwierigkeit, als in dem Decimalsystem. Die Uebereinstimmung mit der Sprache fällt hier nämlich weg. Um z. B. (3120) zu lesen, muß man bemerken, daß die Ziffer 2 gleichgeltend mit 4×2 oder 8 ist, die von 1 gleichgeltend mit $1 \times 4 \times 4$ oder 16; die von 3 mit $3 \times 4 \times 4 \times 4$ oder 192; es wäre demnach (3120) bei der Grundzahl (Basis) 4 so viel als $8 + 16 + 192$ oder 216. Wäre ebenso 5 die Basis, d. h. wendete man die fünf Zeichen 0, 1, 2, 3, 4 an: so würde jede Ziffer einen fünfmal größern Werth erhalten, wenn sie um eine Stelle weiter von der rechten nach der linken Seite hin fortgerückt ist. Z. B. (4123) wäre in diesem fünfziffrigen Systeme gleichbedeutend mit $3 + 2 \times 5 + 1 \times 25 + 4 \cdot 125 = 3 + 10 + 25 + 500$ oder 538.

Um also den Werth einer in irgend einem Zahlensysteme gegebenen Zahl zu erhalten, muß man die verschiedenen Potenzen der Basis bilden, die Ziffer des zweiten Ranges mit der Basis multipliciren, die Ziffer des dritten Ranges mit dem Quadrat der Basis, die des vierten Rangs mit dem Cubus der Basis u. s. w., diese sämmtlichen Produkte endlich addiren. So ist z. B. also (20313), wenn die Basis 4, $= 567$; (4010), bei der Basis 5, $= 505$; (35151), bei der Basis 6, $= 5035$; (6814), bei der Basis 9, $= 5035$.

Betrachtet man vorstehende Rechnung etwas näher, so wird man bald einsehen, daß man sie auch auf folgende Weise ausführen kann. Als Beispiel diene (4123) bei der Basis 5. Man multiplicire die Ziffer 4

mit 5, addire zum Produkt die zur Rechten stehende Ziffer 1 und man erhält so 21; man multiplicire dann 21 mit 5, addire dazu 2 aus der zweiten Stelle, man erhält so 107; endlich multiplicire man mit 5 und addire darauf 3 dazu; der gesuchte Werth ist so 538. Es ist klar, daß durch dieses Verfahren die Ziffer 4 dreimal nach und nach durch 5 multiplicirt worden ist, daß die Ziffer 1 nur zweimal, und die von 2 es nur einmal wurde. Die Operationen sind hier nur in einer andern Ordnung vorgenommen worden; im Grunde aber sind sie ganz dieselben, wie die obigen. Etwas leichter führen sie zum verlangten Resultate.

Wir wollen jetzt die Aufgabe umkehren und die Ziffern für die Zahl 538 in einem Systeme mit fünf Ziffern suchen. Das Resultat sei als bekannt vorausgesetzt, also durch (4123) dargestellt. Nach dem Obenstehenden zeigt der bloße Anblick folgender Gleichungen $4 \times 5 + 1 = 21$; $21 \times 5 + 2 = 107$; $107 \times 5 + 3 = 538$, wie die Rechnung selbst die verlangte Zahl wieder hervorbringen muß. Dividirt man nämlich 538 durch 5, so wird der Rest 3 offenbar die Ziffer der ersten Stelle, der Quotient 107 dagegen der Werth der andern Ziffern sein. Wird ebenso 107 durch 5 dividirt, so wird der Rest 2 die Ziffer der zweiten Stelle, der Quotient 21 der Werth der andern Ziffern u. s. w. sein. Es ist klar, daß die vorher verrichteten Operationen auf diese Art wieder zerlegt worden sind.

Um im Allgemeinen eine gegebene Zahl aus einem Zahlensysteme in ein anderes zu übertragen, muß man diese Zahl durch die neue Basis dividiren, hierauf den erhaltenen Quotienten wieder durch die Basis dividiren, desgleichen den zweiten Quotienten, und so weiter fort, bis man zu einem Quotienten gelangt, der kleiner als diese Basis ist. Die Reihe der neben an einander geschriebenen Reste von der Rechten zur Linken in derselben Ordnung, wie man sie erhalten, genommen, wird den gesuchten Ausdruck geben; der letzte Quotient ist die Ziffer der höchsten Ordnung. Um also 567 mit 4 Zeichen zu schreiben, dividire man 567 durch 4, und man erhält den Quotienten 141 und den Rest 3; darauf 141 durch 4; als Quotient kommt 35 und als Rest 1; $\frac{35}{4}$ gibt 8 und den Rest 3; endlich $\frac{8}{4} = 2$ und der Rest ist 0. Nimmt man diese successiven Reste 3, 1, 3, 0 und den letzten Quotienten und schreibt sie in umgekehrter Ordnung, so erhält man: (20313) (Basis 4) = 567 (Basis 10).

Ebenso wird man finden, daß in den Systemen mit 6, 9 und 12 Zeichen die Zahl 5035 bezüglich durch (35151), (6814) und ($2ab7$) ausgedrückt wird; a und b stellen hier die Zahlen zehn und 11 in dem Duodecimalsysteme dar. Das letzte System hat wegen der vielen Theiler von 12 unverkennbare Vorzüge vor dem Decimalsysteme; es aber jetzt einzuführen, würde seine großen Schwierigkeiten haben, indem wir unsere Gebräuche, selbst

Benennungen, an welche wir von Jugend auf gewöhnt sind, gänzlich ändern müßten. (S. Arith. pol. de Buffon Chap. XXVII.)

Alles was wir so eben gesagt haben, kann durch algebraische Zeichen einfacher dargethan werden. Es seien deshalb i, h, g .... c, b, a die der Reihe nach kommenden Ziffern, ihre Anzahl n; sie stellen die Zahl N in einem Zahlensysteme, dessen Basis x ist, dar, d. h. jede Ziffer hat einen $x$mal größern Werth, wenn sie um eine Stelle weiter nach der Linken gerückt wird. Man hat also die Gleichung

$$N = ix^{n-1} + hx^{n-2} + \ldots\ldots + cx^2 + bx + a;$$

aus der die in dieser Note ausgesprochenen Sätze abgeleitet werden können.

Note 2 zu §. 7.

Die Römer stellten ihre Zahlen folgendermaßen dar:

eins durch	I	fünfzig durch	L	hundert durch	C
zwei durch	II	zehn durch	X	fünfhundert durch	D
drei durch	III	fünf durch	V	tausend durch	M

Diese Charaktere waren ihnen hinreichend, die Zahlen zu bezeichnen; sie zählten die jeder Ziffer zukommenden Werthe zusammen, wenn solche von der Linken zur Rechten hin an numerischer Größe abnahmen. Stand dagegen ein Zeichen, das etwas Kleineres vor einem, das etwas Grösseres aussagte; so wurde der numerische Werth des ersten von dem des zweiten abgezogen. Einige Beispiele zur Erläuterung:

VI sechs; XVI sechszehn; LX sechszig; CX hundertzehn;
IV vier; XIV vierzehn; XL vierzig; XC neunzig;
DC sechshundert; CD vierhundert.

Sie verwandelten durch einen über den Ziffern liegenden Strich die Einheiten auch in Tausende; sie schrieben demnach: $\overline{X}$ für 10000; $\overline{C}$ für 100000; $\overline{MM}$ für 2000000.

Die schriftliche Zahlensprache der Griechen war eben so schlecht erdacht, wie die der Römer. Die Einer, Zehner, Hunderte wurden durch die auf einander folgenden Buchstaben des Alphabets bezeichnet; nämlich:

1	durch	α	10	durch	ι	100	durch	ϱ
2	"	β	20	"	$\varkappa$	200	"	σ
3	"	γ	30	"	λ	500	"	φ
9	"	ϑ	40	"	μ	800	"	ω.

Die Tausende deuteten sie durch unter die Buchstaben gesetzte Accente an. Hierüber einige Beispiele:

$\alpha\beta\varrho\alpha\mu$ ist so viel als $1 + 2 + 100 + 1 + 40 = 144$.
$\beta\text{͵}\varphi\varkappa\vartheta$ " " " $2000 + 500 + 20 + 9 = 2529$.

Note 3 zu §. 14.

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ die Zifferanzahl der verschiedenen Factoren a, b, $c \ldots\ldots$, deren Zahl n ist. Es ist klar, daß $a < 10^{\alpha}$, $b < 10^{\beta}$, $c < 10^{\gamma} \ldots$; das Produkt $a, b, c \ldots\ldots < 10^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} < 10^{m}$, wenn $\alpha+\beta+\gamma \ldots\ldots = m$ gesetzt wird. Uebrigens $a > 10^{\alpha-1}$, $b > 10^{\beta-1}$, $c > 10^{\gamma-1} \ldots\ldots$ woraus $abc \ldots\ldots > 10^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots-n} > 10^{m-n}$. Das Produkt $abc \ldots$ liegt demnach zwischen 10^{m-n} und 10^{m}, kann daher nicht über m Ziffern haben, hat aber deren mehr als m—n. Das Produkt kann also nicht mehr Ziffern als die vorgelegten successive neben aneinander geschriebenen Factoren, als bildeten sie gleichsam eine einzige Zahl, enthalten; jedoch ist die Zahl seiner Ziffern größer, als der Unterschied zwischen der eben erwähnten Anzahl und der Anzahl der vorhandenen Factoren.

Note 4 zu §. 16.

Der im Texte am Schlusse dieses Paragraphs ausgesprochene Satz heißt allgemein so: Die Differenz zweier Zahlen, die durch *eine* und *dieselbe* Zahl dividirt einerlei Rest geben, ist durch gedachte Zahl *theilbar*.

Wird diese Annahme durch algebraische Zeichen ausgedrückt, so gibt sich der Beweis von selbst. Sind nämlich bezüglich n und n′ diese Zahlen, d der Divisor, q und q′ ihre Quotienten, r ihr beiderseitiger Rest, so hat man $\begin{matrix} n = qd + r \\ n' = q'd + r \end{matrix}$. Die untere Gleichung von der obern abgezogen gibt $n - n' = (q - q')\,d$. Da das zweite Glied der Gleichung durch d theilbar ist, so ist es auch das erste, woraus die Richtigkeit der Aussage erhellt.

Note 5 zu §. 22.

Dividirt man zwei ganze Zahlen F und F′ durch irgend eine Zahl n, so nehmen sie die untenstehende Gestaltung an, wenn bezüglich q und q′ die ganzen Quotienten, r und r′ die Reste andeuten.

$$F' = qn + r$$
$$F = q'n + r'.$$

Indem man die Glieder des Produkts untersucht, sieht man, daß sie sämmtlich, mit Ausnahme des letztern rr′, den Faktor n enthalten. Wird

daher das Produkt durch n dividirt, so müssen $\frac{FF'}{n}$ und $\frac{rr'}{n}$ einerlei Rest geben.

Note 6 zu §. 27.

Es seien bezüglich $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ die Zahlen, welche anzeigen, wie oft eine Zahl N durch die Grundfactoren $a, b, c \ldots\ldots$ sich hat theilen lassen; dann ist $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots\ldots$ N ist nur durch die verschiedenen Glieder des Produktes $(1+a+a^2+\ldots\ldots a^\alpha)\times(1+b+b^2+b^3+\ldots b^\beta)\times\ldots\ldots$ theilbar. Die Anzahl der Glieder des Produkts oder die der Theiler von N ist $(1+\alpha)\,(1+\beta)\ldots$

Anmerkung 1. In der That läßt sich jede Zahl N als ein Produkt von der Form a^α, b^β, c^γ ..... darstellen. Es sei a der erste Grundfactor, welcher in N aufgeht; dann $N = a^\alpha . Q$. Es sei b der erste Grundfactor, welcher in Q aufgeht; dann $Q = b^\beta Q'$. Wird auf diese Art fortgefahren, wie es in §. 27 angegeben ist, so hat man:

$$N = a^\alpha . Q = a^\alpha . b^\beta . Q' = \ldots\ldots = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots\ldots Q^{(p)}$$

Die Zahlen N, Q, Q'..... $Q^{(p)}$ werden immer kleiner und kleiner. Da nun N eine endliche Zahl, mithin die Anzahl ihrer Factoren bestimmt ist, so muß man auf diesem Wege einmal ein $Q^{(p)}$ erhalten, das selbst eine Primzahl ist.

Anmerkung 2. Jeder Theiler von N ist ein Produkt von der Gestalt wie $a^{\alpha'} . b^{\beta'} . c^{\gamma'} \ldots\ldots$, wo $\alpha', \beta', \gamma' \ldots\ldots$ beliebige ganze Exponenten sind; keiner jedoch größer, als der ihm entsprechende $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ Sämmtliche Zahlen dieser Art sind nun die Glieder des entwickelten Produkts $(1+a+a^2+\ldots\ldots a^\alpha)\times(1+b+b^2+\ldots\ldots b^3)\times(1+c+c^2+\ldots\ldots c^\gamma)$; denn so wird jede Potenz von a mit jeder Potenz von b, c..... multiplicirt vorkommen, was verlangt wird. Ferner sind alle Glieder dieser Entwickelung von einander verschieden, ihre Anzahl ist daher durch den Ausdruck $(1+\alpha)\,(1+\beta)\ldots\ldots$ dargestellt.

Die Anzahl sämmtlicher Theiler von $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ist $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Ueber die Eigenschaften der Zahlen sehe Gauss Disquisitiones arithmeticæ; ferner la théorie des nombres par Legendre.

Note 7 zu §. 34.

Dividirt man eine ungerade Zahl durch 6, so kann der Rest nur 1, oder 3 oder 5 sein. Ist diese Zahl kein Vielfaches von 3, so kann der Rest nur + 1 oder — 1 (gleichgeltend mit 5) sein. Sämmtliche weder durch 2, noch durch 3 theilbare Zahlen sind unter der Form $6z \pm 1$ begriffen: z stellt irgend eine ganze Zahl vor. Alle Primzahlen und ihre Vielfachen, mit Ausnahme der von 2 und 3, gehören hierher.

Note 8 zu §. 38.

Wir wollen die Zahlen x und y suchen, die den beiden Gliedern eines Bruches $\frac{a}{b}$ beigefügt oder von ihnen abgezogen, seinen Werth unverändert lassen, oder $\frac{a}{b} = \frac{a \pm x}{b \pm y}$ machen. Die Gleichung unter einerlei Nenner gebracht gibt $ay = bx$; woraus, durch by dividirt, $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ d. h. die Zahlen, welche man zu beiden Gliedern eines Bruches addiren oder von ihnen abziehen darf, ohne dadurch seinen Werth zu ändern, gehören also einem Bruche an, der dem vorgelegten gleich ist. Man sieht, daß x nur dann gleich y sein kann, wenn a gleich b ist, d. h. man kann eine und dieselbe Zahl nur dann zu beiden Gliedern eines Bruches addiren oder von ihnen abziehen, wenn er $= 1$ ist.

Note 9 zu §. 40.

Die in dem Text stehenden Betrachtungen vermögen uns mit Cauchy folgende Definition von der Multiplication zu geben: A mit B multipliciren, heißt mit der Zahl A gerade so operiren, wie man mit der Einheit operirt, um die Zahl B zu erhalten. So ist 5 die Einheit fünfmal zu sich selbst hinzugefügt; um also 3 mit 5 zu multipliciren, muß man 3 zu sich selbst fünfmal addiren. $\frac{5}{7}$ heißt: man hat die Einheit in 7 gleiche Theile getheilt und dann deren 5 genommen; um also 3 mit $\frac{5}{7}$ zu multipliciren, muß man 3 in 7 gleiche Theile theilen und fünfmal dieses Resultat $\frac{3}{7}$ nehmen; das Produkt ist $\frac{15}{7}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, $\frac{5}{7}$ der Zahl 3. Lacroix drückt dies aus, indem er sagt: Das Produkt ist aus dem Multiplicand auf dieselbe Weise zusammengesetzt, wie der Multiplicator aus der Einheit zusammengesetzt wird. Dieser Erklärung fehlt es aber an Klarheit, weil der Ausdruck zusammengesetzt in einer activen oder passiven Bedeutung zu nehmen ist, je nachdem der Multiplicator eine ganze Zahl oder ein Bruch ist.

Der von Lacroix gegebenen Erklärung der Multiplication, die lautet: "eine Zahl mit einer andern multipliciren heißt: aus der ersten Zahl eine

„dritte auf dieselbe Weise bilden, wie die zweite aus der Einheit gebil„det ist“ — fehlt es, nach meinem Dafürhalten, nicht an Klarheit. Nach dieser Definition besteht offenbar die Multiplication mit einem Bruche darin, von irgend einem Multiplicand diejenigen Theile zu nehmen, welche der gebrochene Multiplicator angibt. Sehr richtig bemerkt hierbei dieser ausgezeichnete Mathematiker, daß man auf diese Erklärung der Multiplication durch eine häufig vorkommende Aufgabe geführt wird. Es ist dies die Aufgabe, in welcher der Preis einer Menge von Dingen einerlei Art aus dem gegebenen Preise der Einheit dieser Dinge verlangt wird. Die Aufgabe bleibt dieselbe, es mag die Menge, deren Preis man sucht, größer oder kleiner als die Einheit sein. — Zugeben kann man jedoch, daß die von Francoeur und Cauchy aufgestellte Definition vielleicht etwas schärfer als die von Lacroix gegebene sei.

Note 10 zu §. 46.

Multiplicirt man zwei Zahlen a und b mit einander, die nur näherungsweise richtig sind, so ist das wahre Produkt $(a+x) \cdot (b+y) = ab + bx + ay + xy$, wenn x und y bezüglich die Fehler darstellen. Vernachläßigen wir die sehr kleine Größe xy, so wird der Fehler des Produkts $bx+ay$ sein und geringer werden, wenn der eine Factor näherungsweise zu groß, der andere näherungsweise zu klein ist. Denn x und y haben alsdann entgegengesetzte Zeichen; aus der Summe $ax+by$ wird sonach eine Differenz. Es ist passend, die Factoren a und b so zu wählen, daß sie sich in solchem Falle befinden. — Hat dies nicht statt, oder weiß man nicht, in welchem Sinne die Annäherung bei einer jeden Zahl zu nehmen ist, so wird das Glied ay, das einflußreichste des Fehlers mit y abnehmen, d. h. wenn b sehr nahe richtig ist. **Der Fehler des Produktes ab ist also desto geringer, je näher der kleinere Factor b genommen ist.**

Ueberhaupt sind x und y bei der Multiplication zweier Decimalbrüche, immer kleiner als $\frac{1}{2}$; denn um die Factoren a und b ganzzahlig zu machen, muß man annehmen, daß das Komma weggelassen und die Ziffer der Einer um 1 vermehrt ist, falls die erste vernachläßigte Decimalziffer 5 oder eine höhere Ziffer wäre. Setzen wir also $x = y = \frac{1}{2}$, so ist die Fehlergrenze $= \frac{1}{2}(a+b)$. Leicht ists hiernach in jedem besondern Falle die richtigen Ziffern des Produkts ab von den nicht richtigen zu unterscheiden. In dem Beispiele $53{,}71 \times 1{,}02 = 54{,}7842$ seien die Factoren nur genäherte Werthe. Ihre halbe Summe, das Komma weggelassen, hat vier Ziffern, wonach die vier letzten Stellen fehlerhaft sein können. Die Aufsuchung der vier Decimalstellen im Produkte war unnöthig, da man nicht weiß, ob sie genau sind. Hieraus ergibt sich der Nutzen einer

abgekürzten Multiplication, vorausgesetzt, daß bei solcher nur die fehlerhaften Ziffern geändert werden, die man hernach doch zu vernachläßigen genöthigt wäre. In dem im Text angegebenen Beispiele hat die halbe Summe der Factoren 9 Ziffern und das vollständige Produkt 14 Decimalstellen; nur die ersten 5 Decimalziffern sind als richtig beizubehalten. Man muß 6 oder höchstens 7 Decimalstellen im Produkte suchen, und eine dann wegstreichen. Das Produkt ist 64,377269.

Note 11 zu §. 50.

Die allgemeine Form eines Bruchs, der sich immer in einen endlichen Decimalbruch verwandeln läßt, ist $\frac{a}{2^m \times 5^n}$; die Zahl der Decimalziffern ist gleich dem größten von beiden Exponenten m und n. Uebertrifft der eine den andern um k, so ist der gesammte Decimalwerth $= a \times 5^k$ oder $a \times 2^k$, oder a, je nachdem m $>$ oder $<$ oder $=$ n ist.

Note 12 zu §. 52.

Um den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, hängt man jedem Reste eine Null an. Es seien 10D und 10D′ zwei Partialdividende die zu einem und demselben Reste führen. Sind q und q′ die Quotienten, so hat man $10D = bq + r$, $10D' = bq' + r$, woraus durch Abziehung $10 (D - D') = b (q - q')$.

Hat nun b weder 5 noch 2 zu Factoren, so sind 10 und b Primzahlen unter sich; $q - q'$ ist < 10, weil jeder Partialquotient einstellig ist; das zweite Glied kann daher kein Vielfaches von 10 sein. Vorstehende Gleichung kann demnach nur statt haben, wenn $q - q' = 0$ ist, woraus $D = D'$, d. h. derselbe Rest kehrt erst mit demselben Partialdividend wieder. q macht also einen Theil der Periode aus, die sich durch die Wiederkehr einer der schon erhaltenen Reste zu erkennen gibt. Da nun der Rest D gleichfalls von einem schon gebrauchten Dividend herrührt, so folgt hieraus, daß man bis zum ersten Dividend zurückkehren muß, um den Ursprung der Periode zu finden, die darnach mit der ersten Decimalziffer beginnt.

Note 13 zu §. 53.

Einen periodischen Decimalbruch K in einen gewöhnlichen Bruch von gleichem Werthe zu verwandeln.

1) Der gegebene Bruch sei ein vollständig periodischer Decimalbruch. Man hat:

$K = 0,[abc.....z]$. $a, b, c......z$ sind die n-Ziffern der Periode. Wird diese Gleichung mit 10^n multiplicirt, so ist

$$10^n K = abc......, [abc......]; \text{ hiervon}$$
$$K = [abc......] \text{ abgezogen, bleibt}$$
$$(10^n-1) K = abc...., \text{ oder}$$
$$K = \frac{abc....}{10^n - 1}.$$

2) Der gegebene Bruch sei ein unvollständig periodischer Decimalbruch. Man hat

$$K = o,\alpha\beta\gamma.....\ \omega[abc......z];$$

$\alpha, \beta, \gamma.....$ sind die m-Ziffern, welche der n-stelligen Periode vorausgehen. Multiplicirt man diese Gleichung einmal mit 10^{m+n}, das andere Mal mit 10^m, so hat man

$$10^{m+n}\ K = \alpha\beta\gamma......\omega.abc......., [abc.......z]$$
$$10^m\ \ K = \alpha\beta\gamma\ ...., [abc.........]$$
$$\text{woraus } 10^m(10^n-1) K = \alpha\beta\gamma..\omega.abc.......z - \alpha\beta\gamma.........\omega$$
$$\text{oder } K = \frac{\alpha\beta\gamma.....\omega.abc.......z - \alpha\beta\gamma.....\omega}{10^m\ (10^n-1)}$$

$$\text{Beispiel } 0{,}26[36] = \frac{2636-26}{100 \cdot 99} = \frac{29}{110}.$$

Note 14 zu §. 62 und 68.

Das Quadrat einer n-ziffrigen Zahl hat $2n - 1$ oder $2\text{-}n$ Ziffern. Die Zahl sei N; dann N = oder > 10^{n-1} und N = < 10^n, woraus N^2 = oder > 10^{2n-2} und $N < 10^{2n}$; d. h. N hat entweder $2n-1$ oder 2n-Ziffern.

Der Cubus jeder n-ziffrigen Zahl hat entweder 3n, oder $3n-1$, oder $3n-2$ Ziffern. Die gegebene Zahl sei N; dann N = oder > 10^{n-1} und $N < 10^n$, woraus N^3 = oder > 10^{3n-3}, und $N < 10^{3n}$; d. h. N hat entweder $3n-2$, oder $3n-1$, oder 3n-Ziffern.

Beide Sätze sind nur als specielle Fälle des in der Note 3 erwiesenen allgemeinen Satzes anzusehen.

Note 15 zu §. 63.

Die Einheit sei in q gleiche Theile getheilt; um die größte in $\sqrt{N}$ enthaltene Zahl x dieser Theile zu kennen, d. h. um den bis auf $\frac{1}{q}$ der Einheit richtigen Bruch $\frac{x}{q}$ von $\sqrt{N}$ zu erhalten, hat man x dergestalt zu bestimmen, daß $\frac{x}{q} < \sqrt{N}$ und $\sqrt{N} < \frac{x+1}{q}$ sei. Nun ist $\sqrt{N} = \frac{q}{q}$

$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{Nq^2}}{q}$; also $x < \sqrt{Nq^2}$ und $\sqrt{Nq^2} < x + 1$, d. h. x ist die größte in $\sqrt{Nq^2}$ enthaltene ganze Zahl.

Note 16 zu §. 63 und 69. 1.°

Ist N irgend eine ganze Zahl und hat man $\sqrt[n]{N} > a$ und zugleich $< a+1$, so ist $\sqrt[n]{N}$ irrational; denn wäre $\sqrt[n]{N} = a + \frac{x}{q} = \frac{aq+x}{y} = \frac{z}{y}$ (z und y sind Primzahlen unter sich), so müßte $N = \left(\frac{z}{y}\right)^n$ sein, was unmöglich ist.

Note 17 zu §. 69. 3.°

Das Geschäft des Wurzelausziehens wird sehr weitläufig, sobald die Wurzel eine große Zahl ist; man kann aber den mühsameren Theil dieser Arbeit, der in dem Aufsuchen der Divisoren liegt, abkürzen, welche zum Zwecke haben, die auf einander folgenden Ziffern der Wurzel anzugeben. Wir wollen dies Verfahren bei der Wurzel von 477 in Anwendung bringen. Angenommen, daß man den Theil 7,8 dieser Wurzel schon gefunden habe, und man die Annäherung weiter fortsetzen wolle. Man muß 3×78^2 suchen; nun hat man schon die Größe $(3a^2 + 3ab + b^2)$ gebildet, indem man setzt $a = 7$ Zehner, $b = 8$ Einer, und will $3a'^2 = 3(a+b)^2 = 3(a^2 + 2ab + b^2)$ finden, eine Größe, welche $3a^2 + 3ab + b^2$ um $3ab + 2b^2$ übertrifft. Zu 16444, was das erste Trinom darstellt, muß man also $3ab$ oder 168 Zehner und $2b^2$ oder 2×64 addiren. Diese Rechnung steht hier unten. Hat man einmal den Divisor gefunden, so erhält man leicht die Ziffer der Hunderteln und den Rest, dann durch ein ähnliches Verfahren den nächstfolgenden Divisor u. s. w.

477	7,8	16444
343	147	1680
1340.00	168	128
1315 52	164×2	$18252 = 3 \times 78^2$
24 480.00	16444×8	

Note 18 zu §. 72.

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist immer größer als die mittlere Proportionale derselben. Es sei a die größere und b die kleinere Zahl; dann $a - b > 0$, oder $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ auf beiden Seiten $4ab$ hinzugefügt, gibt $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$, woraus $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$; algebraischer Ausdruck der Behauptung.

Inhalt des ersten Buches.

(Arithmetik.)

Erstes Kapitel.

Von den ganzen Zahlen.

	Seite
Vorwort des Verfassers	III
Vorwort des Uebersetzers	VI
Zahlensystem	1
Addition	8
Subtraction	9
Multiplication	12
Division	18
Gemeinschaftlicher Theiler	28
Theilbarkeit der Zahlen	36
Probe der vier Rechnungsarten	41

Zweites Kapitel.

Von den Brüchen.

Die Brüche überhaupt	43
Decimalbrüche	52
Die periodischen Decimalbrüche	57
Benannte Zahlen	64
Französisches Maß- und Gewichts-System	64
Maß- und Gewichtsbestimmungen in verschiedenen Staaten Europas	67

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen und Wurzeln.

Bildung der Potenzen	78
Quadratwurzel	80
Cubikwurzel	87

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

	Seite
Aequidifferenzen und Proportionen	93
Einfache Regeldetri	97
Zusammengesetzte Regeldetri	103
Gesellschaftsrechnung	106
Interessenrechnung	107
Rabattrechnung	109
Kettenregel	109
Progressionen	113
Logarithmen	115
Theiler-Tafel	127
Noten	129

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Francoeur, Louis Benjamin,

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik

Bd.: 1. Band 1. Buch

1843

Coburg, Landesbibliothek -- Cas A 3580(1)
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11928694-3